NOTE SUR LA DÉRIVÉE DE LIE D'UN ÊTRE GÉOMÉTRIQUE

YOSHIHIRO TASHIRO

Dans mon Mémoire récent " Sur la dérivée de Lie d'un être géométrique et son groupe d'invariance ",[1] nous avons obtenu une formule entre les dérivée de Lie d'un être géométrique spécial, soit linéaire,

$$(X_b X_c)\Omega^A = c_{bc}{}^a X_a \Omega^A, \tag{1}$$

X_a étant les opérateurs de la différentation de Lie par rapport aux déformations d'un groupe continu G_r, et $c_{bc}{}^a$ les constantes de structure du groupe. Par conséquent, les résultats se limitaient à tels êtres et en outre les expressions étaient surabondantes et compliquées.

Cette Note est un addenda pour démontrer l'existence de la formules (1) pour un être géométrique général et pour raccourcir les expressions. Comme conséquence, beaucoup de résultats dans DL seront aussi applicables aux êtres géométriques généraux par petites modifications.

1. Dans un espace général à n dimensions, un être géométrique est un être consistant en N composantes $\Omega^A(x)$, qui, par un changement de coordonnées $\bar{x}^\lambda = f^\lambda(x^1, \cdots\cdots, x^n)$, se transforment suivant la loi

$$\Omega^A(\bar{x}) = F^A(\Omega^B, x^\lambda, f^\lambda, f^\lambda{}_{,\nu_1}, \cdots\cdots, f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\cdots\nu_k}), \quad f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\cdots\nu_s} \equiv \frac{\partial^s f^\lambda}{\partial x^{\nu_1}\cdots\partial x^{\nu_s}}$$

$$(A = 1, \cdots\cdots, N;\ \lambda, \mu, \nu, \omega = 1, \cdots\cdots, n;\ s = 1, \cdots\cdots, k)$$

où les fonctions du second membre, qui s'écriront brièvement comme $F^A(\Omega, x, \bar{x})$, possèdent des propriétés

$$(3)\quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad F^A(F(\Omega, x, \bar{x}), \bar{x}, \bar{\bar{x}}) = F^A(\Omega, x, \bar{\bar{x}}), \\ &\text{b)} \quad F^A(\Omega, x, x) \equiv F^A(\Omega^B, x^\lambda, x^\lambda, \delta^\lambda_{\nu_1}, 0, \cdots\cdots, 0) = \Omega^A, \\ &\text{c)} \quad F^A(F(\Omega, x, \bar{x}), \bar{x}, x) = \Omega^A, \end{aligned}$$

1) Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 2, 1951, pp. 166—181; il sera cité comme DL.

(x^λ), $(\bar{x}^\lambda)$, $(\bar{\bar{x}}^\lambda)$ étant trois systèmes quelconques de coordonnées.

Par rapport à une déformation infinitésimale $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda \delta t$, *la dérivée de Lie* d'un être géométrique $\Omega^A(x)$, qui est définie par

$$(4) \qquad X\Omega^A = \lim_{\delta t \to 0} (\bar{\Omega}^A(\bar{x}) - \Omega^A(\bar{x})) \,/\, \delta t,$$

a comme composantes des expressions

$$(5) \qquad X\Omega^A = \xi^\lambda \Omega^A{}_{,\lambda} - \xi^A(x, \Omega),$$

où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport àux variables x^λ et nous avons posé

$$\xi^A(x, \Omega) \equiv \xi^\lambda{}_{,\nu_s} F^{A\nu_s}_{\lambda} \equiv \sum_{s=0}^{k} \xi^\lambda{}_{,\nu_1 \cdots\cdots \nu_s} F^{A\nu_1 \cdots\cdots \nu_s}_{\lambda},$$

$$F^{A\nu_1 \cdots\cdots \nu_s}_{\lambda} = \left[\frac{\partial F^A}{\partial f^\lambda{}_{,\nu_1 \cdots\cdots \nu_s}} \right]_{f^\lambda = x^\lambda,\ f^\lambda{}_{,\nu_1} = \delta^\lambda_{\nu_1},\ f^\lambda{}_{,\nu_1 \cdots\cdots \nu_t} = 0}$$

$$(s = 0, 1, \cdots\cdots, k;\ t = 2, \cdots\cdots, k).$$

Les composantes de la dérivée de Lie d'un être géométrique Ω^A se transforment suivant la loi

$$(6) \qquad \overline{X\Omega}^A = \frac{\partial F^A}{\partial \Omega^B} X\Omega^B \qquad (A, B = 1, \cdots\cdots, N),$$

où et désormais la convention de sommation sera aussi adoptée à l'indice capital. Par conséquent, pour que la dérivée de Lie d'un être géométrique soit *elle-même* un être géométrique, il faut et il suffit que les fonctions de transformation $F^A(\Omega, x, \bar{x})$ soient linéaires en ses composantes Ω^A, un tel être géométrique s'étant appelé un être géométrique *linéaire* dans DL. *L'union* $\{\Omega^A, X\Omega^A\}$ d'un être géométrique et de sa dérivée de Lie est aussi un être géométrique.

2. Considérons maintenant deux transformations infinitésimales quelconques

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\text{b)} \qquad \bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda_b \delta s, \\ &\text{c)} \qquad \bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda_c \delta t. \end{aligned}$$

Quand on effectue successivement ces deux transformations, en négligeant des quantités infinitésimales d'ordre suppérieur à deux, le premier membre de (3 a) est égal à

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Omega}}^A &= \bar{\Omega}^A(\bar{x}) + \xi^A_c(\bar{\Omega}, \bar{x})\delta t + \frac{1}{2}(\xi_c\xi_c)^A\delta t^2 \\ (8) \qquad &= \Omega^A + \xi^A_b\delta s + \frac{1}{2}(\xi_b\xi_b)^A\delta s^2 \\ &\quad + \xi^A_c\delta t + (\xi^A_{c,\mu}\xi^\mu_b + \xi^A_{c,B}\xi^B_b)\delta s\delta t + \frac{1}{2}(\xi_c\xi_c)^A\delta t^2, \end{aligned}$$

où la virgule précédant la capitale indique la dérivée partielle par rapport à la composante Ω^B et l'on a posé symboliquement

$$(\xi\xi)^A = \sum_{s=0}^{k}\sum_{t=0}^{k} \xi^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\cdots\nu_s}\xi^\mu{}_{,\omega_1\cdots\cdots\omega_t}\left[\frac{\partial F^A}{\partial f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\cdots\nu_s}\,\partial f^\mu{}_{,\omega_1\cdots\cdots\omega_t}}\right]_{\substack{f^\lambda = x^\lambda \\ f^\lambda{}_{,\nu_1} = \delta^\lambda_{\nu_1} \\ f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\cdots\nu_t} = 0}}$$

D'autre part, en tenant compte de

$$\bar{\bar{x}}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda_b\delta s + \xi^\lambda_c\delta t + \xi^\lambda_{c,\mu}\xi^\mu_b\delta s\delta t$$

le deuxième membre de (3 a) est égal à

$$\begin{aligned} (9) \qquad \bar{\bar{\Omega}}^A &= \Omega^A + \xi^A_b\delta s + \xi^A_c\delta t + (\xi^\lambda_{c,\mu}\xi^\mu_b)_{,\nu_s}F^{A\nu_s}_\lambda\delta s\delta t \\ &\quad + \frac{1}{2}(\xi_b\delta s + \xi_c\delta t,\ \xi_b\delta s + \xi_c\delta t)^A. \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de δs et de δt dans deux expressions (8) et (9), nous obtenons des identités

$$(10) \qquad \xi^\mu_b\xi^A_{c,\mu} + \xi^A_{c,B}\xi^B_b = (\xi^\lambda_{c,\mu}\xi^\mu_b)_{,\nu_s}F^{A\nu_s}_\lambda + (\xi_b\xi_c)^A$$

qui sont varables pour vecteurs quelconques ξ^λ_b et ξ^λ_c.

La dérivée de Lie du vecteur ξ^λ_c par la déformation infinitésimale correspondant à ξ^λ_b est un vecteur:

$$(11) \qquad \xi^\lambda_{bc} \equiv X_b\xi^\lambda_c = \xi^\mu_b\xi^\lambda_{c,\mu} - \xi^\mu_c\xi^\lambda_{b,\mu}.$$

La dérivée de Lie de l'union $\{\Omega^A, X_c\Omega^A\}$ par rapport à une déformation correspondant à ξ^λ_b est l'union de

$$(12) \qquad X_b\Omega^A = \xi^\lambda_b\Omega^A{}_{,\lambda} - \xi^A_b(x, \Omega)$$

et

$$\begin{aligned} (13) \qquad X_bX_c\Omega^A &= \xi^\mu_b(\xi^\lambda_{c,\mu}\Omega^A{}_{,\lambda} + \xi^\lambda_c\Omega^A{}_{,\lambda,\mu} - \xi^A_{c,\mu} - \xi^A_{c,B}\Omega^B{}_{,\mu}) \\ &\quad - \xi^A_{b,B}(\xi^\mu_c\Omega^B{}_{,\mu} - \xi^B_c). \end{aligned}$$

En échangeant les indices b et c de (13), retranchant le résultat de (13) et tenant compte de (12) et (5), nous avons enfin les formules

$$\begin{aligned}(X_b X_c)\Omega^A &= \xi^\lambda_{bc}\Omega^A{}_{,\lambda} - \xi^\lambda_{bc,\nu_s} F^{A\nu_s}_{\lambda} \\ &= \xi^\lambda_{bc}\Omega^A{}_{,\lambda} - \xi^A_{bc} \\ &= X_{bc}\Omega^A,\end{aligned}$$

X_{bc} étant l'opérateur de Lie correspondant à la déformation infinitésimale du vecteur ξ^λ_{bc}.

Si ξ^λ_a, ξ^λ_b, ξ^λ_c sont les vecteurs d'un groupe G_r à r paramètres, nous avons $\xi^\lambda_{bc} = c_{bc}{}^a \xi^\lambda_a$, et ensuite

$$(X_b X_c)\Omega^A = c_{bc}{}^a X_a \Omega^A,$$

où $c_{bc}{}^a$ sont les constantes de structure du groupe G_r.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received February 10, 1951*)