ZUR THEORIE DER HALB-TOPOLOGISCHEN GRUPPEN UND KÖRPER[1),2)]

MIKAO MORIYA

Die Strukturtheorie der im Kleinen kompakten, topologischen Körper ist bisher von mehreren Autoren (Van Dantzig [1], [2]; Jacobson [1], [2]; Otobe [1], [2]; Kaplansky [1])[3)] in Angriff genommen worden. Dabei haben Jacobson (Jacobson [1]) und Otobe (Otobe [1], [2]) gezeigt, daß die Voraussetzung über die Stetigkeit der Division entbehrlich ist. Dies führt uns naturgemäß zur Theorie der halb-topologischen Gruppen und Körper, die ich in der vorliegenden Arbeit entwickeln will. Wie später in §3 gezeigt wird, folgert sich die Stetigkeit der Subtraktion und Division notwendig bei im Kleinen kompakten halb-topologischen Körpern, welche dem Fréchetschen Trennungsaxiom genügen.

§1. Halb-topologische und topologische Gruppen.

Eine nicht leere Menge M ist bekanntlich eine *Halbgruppe* genannt, wenn für je zwei Elemente x, y aus M stets ihr Produkt xy aus M eindeutig definiert ist und das assoziative Gesetz $(xy)z = x(yz)$ erfüllt ist, wo z auch ein Element aus M bezeichnet. Wenn ferner die Halbgruppe M im Sinne von Kuratowski einen topologischen Raum bildet (Vgl. etwa Alexandroff-Hopf [1], S. 37.) und die Abbildung $(x, y) \to xy$ des Produktraumes $M \times M$ in M stetig ist, dann heiße M eine *topologische Halbgruppe*. Eine Gruppe G ist offenbar eine Halbgruppe. Bildet ferner G eine topologische Halbgruppe, so nennt man G eine *halb-topologische Gruppe*.

Hilfssatz 1. *Sind M_1, M_2, ..., M_n nicht leere, kompakte*[4)] *Mengen aus einer topologischen Halbgruppe M, so ist das Produkt $M_1M_2 \cdots\cdots M_n$ auch kompakt.*

---

1) A work by the Scientific Research Expenditure of the Ministry of Education.

2) Diese Arbeit ist ein Teil meiner Vorlesung „Über topologische Körper", die ich in 1949/50 an der Universität Hokkaido gehalten hatte.

3) Die zwischen eckigen Klammern stehenden Nummern beziehen sich auf Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

4) Das Wort „kompakt" bedeutet hier „bikompakt".

Beweis. Es ist wohlbekannt, daß im Produktraum $P = \underbrace{M \times M \times \cdots\cdots \times M}_{n}$ die Teilmenge $M_1 \times M_2 \times \cdots\cdots \times M_n$ kompakt ist. Ist $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ein Punkt aus P, so definiert die Zuordnung

$$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \rightarrow x_1 x_2 \cdots\cdots x_n \ (\in M)$$

eine stetige Abbildung von P in M. Durch diese Abbildung geht aber die kompakte Menge $M_1 \times M_2 \times \cdots\cdots \times M_n$ auf das Produkt $M_1 M_2 \cdots\cdots M_n$ über, daher ist $M_1 M_2 \cdots\cdots M_n$ kompakt.

Hilfssatz 2. *Es sei M eine topologische Halbgruppe, und $N = \{a_\lambda b_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ eine Teilmenge aus M, wobei die a_λ, b_λ $(\lambda \in \Lambda)$ Elemente aus M sind. Ferner sei die Menge $A = \{a_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ in einer abgeschlossenen, kompakten Menge aus M enthalten. Dann existiert zu einem beliebigen Element b aus der abgeschlossenen Hülle der Menge $B = \{b_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ ein Element a aus der abgeschlossenen Hülle von A derart, daß das Produkt ab der abgeschlossenen Hülle von N angehört.*

Beweis. Vgl. Numakura ([1], Lemma 1). Die dort angefügte Voraussetzung, daß M dem Hausdorffschen Trennungsaxiom genügt, ist überflüssig.

Nun beweist man leicht folgenden

Hilfssatz 3. *In einer halb-topologischen Gruppe G ist die Abbildung $x \rightarrow ax$ (oder $x \rightarrow xa$)*[1] *ein Homöomorphismus von G auf sich selbst, wobei a ein beliebig festgelegtes Element aus G ist und x alle Elemente aus G durchläuft.*

Hilfssatz 4. *Es sei G eine halb-topologische Gruppe, welche dem Fréchetschen Trennungsaxiom genügt. Ferner sei B eine nicht leere, kompakte und abgeschlossene Teilmenge aus G. Gilt dann für ein Element p aus G*

$$Bp \subseteqq B,$$

so ist $Bp = B$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt die Relation

$$B \supseteqq Bp \supseteqq Bp^2 \supseteqq \cdots\cdots \supseteqq Bp^n \supseteqq \cdots\cdots.$$

Bezeichnet nun b ein Element aus B, so ist $b^{-1}B$ eine kompakte

1) Wenn die Gruppenoperation Addition ist, so ist $x \rightarrow a + x$ (oder $x \rightarrow x + a$) ein Homöomorphismus von G auf sich selbst.

Menge, und es enthält die Menge $\{p^i;\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots\}$. Wie in der vorangehenden Arbeit von Numakura (Numakura [1], Lemma 2), schließt man ohne Schwierigkeit, daß es ein Element q aus G gibt, für welches

$$Bq = Bpq$$

gilt, woraus $B = Bp$ folgt.

Hilfssatz 5. *Eine halb-topologische Gruppe G ist dann und nur dann topologische Gruppe, wenn zu einer beliebigen Umgebung $U(e)$ des Einheitselementes e stets eine Umgebung $V(e)$ von e existiert, so daß*

$$V(e)^{-1} \subseteqq U(e)$$

ist.

Beweis. Wenn G eine topologische Gruppe ist, so existiert zu einer Umgebung $U(e)$ von $e = e^{-1}$ eine Umgebung $V(e)$ derart, daß $V(e)^{-1} \subseteqq U(e)$ ist.

Nun wollen wir die Umkehrung beweisen. Zu diesem Zweck nehmen wir ein beliebiges Element x aus G und eine beliebige Umgebung $U(x^{-1})$ von x^{-1} heraus. Dann existiert eine Umgebung $U(e)$ von e derart, daß $U(e)x^{-1} \subseteqq U(x^{-1})$ ist, weil G halb-topologische Gruppe ist. Nun gibt es nach Voraussetzung eine solche Umgebung $V(e)$, daß $V(e)^{-1} \subseteqq U(e)$ ist, und folglich gilt ohne weiteres:

$$V(e)^{-1}x^{-1} \subseteqq U(e)x^{-1} \subseteqq U(x^{-1}).$$

Da $xV(e)$ eine x enthaltende offene Menge ist, so existiert eine in $xV(e)$ enthaltene Umgebung $V(x)$ von x; daher gilt:

$$V(x)^{-1} \subseteqq (xV(e))^{-1} \subseteqq V(e)^{-1}x^{-1} \subseteqq U(x^{-1}).$$

Dies zeigt aber, daß die halb-topologische Gruppe G eine topologische Gruppe bildet.

Satz 1. *Eine halb-topologische Gruppe G ist dann und nur dann eine topologische Gruppe, wenn für jede nicht leere, abgeschlossene Menge F stets die Relation*

$$\bigcap_{\lambda} (U_\lambda(e)F) = F$$

gilt, wobei $U_\lambda(e)$ alle Umgebungen aus einem vollen Umgebungssystem des Einheitselementes e aus G durchläuft.

Beweis. Es sei G eine topologische Gruppe und F eine nicht leere, abgeschlossene Menge aus G. Ferner sei

$$\bigcap_{\lambda} (U_{\lambda}(e)F) \neq F,$$

wobei $U_{\lambda}(e)$ alle Umgebungen aus einem vollen Umgebungssystem Σ_0 von e durchläuft. Dann gibt es ein Element p aus $\bigcap_{\lambda}(U_{\lambda}(e)F)$, welches nicht zu F gehört. Weil F abgeschlossen ist, so gibt es eine Umgebung $V(e)$ von e derart, daß

$$F \cap V(e)p = \phi \qquad \text{(leere Menge)}$$

ist. Aus Hilfssatz 5 schließt man sofort, daß es eine Umgebung $U_{\tau}(e)$ aus Σ_0 gibt, so daß $V(e)p \supseteqq U_{\tau}(e)^{-1}p$ ist. Hieraus folgt:

$$F \cap U_{\tau}(e)^{-1}p = \phi.$$

Nun sieht man sofort ein, daß

$$U_{\tau}(e)F \not\ni p$$

und infolgedessen $\bigcap_{\lambda} U_{\lambda}(e)F \not\ni p$ ist; dies ist aber ein Widerspruch.

Umgekehrt nehmen wir an, daß für jede nicht leere, abgeschlossene Menge F stets $\bigcap_{\lambda} U_{\lambda}(e)F = F$ ist. Ist nnn $U(e)$ eine beliebige Umgebung von e, so ist das Komplement F_0 von $U(e)$ in G abgeschlossen. Weil $\bigcap_{\lambda} U_{\lambda}(e)F_0 = F_0$ ist, so gibt es eine Umgebung $U_{\tau}(e)$ aus Σ_0 derart, daß $U_{\tau}(e)F_0 \not\ni e$ ist. Hieraus schließt man sofort, daß

$$F_0 \cap U_{\tau}(e)^{-1} = \phi$$

ist; d.h. $U_{\tau}(e)^{-1}$ muß in $U(e)$ enthalten sein. Dies besagt aber nach Hilfssatz 5, daß G eine topologische Gruppe ist,

Zusatz. *Eine kompakte halb-topologische Gruppe, welche dem Fréchetschen Trennungsaxiom genügt, ist eine topologische Gruppe.*

Beweis. Ist F eine nicht leere, abgeschlossene Menge aus G, so ist F bekanntlich kompakt. Nun sei p ein beliebiges Element aus $\bigcap_{\lambda} U_{\lambda}(e)F$, wobei $U_{\lambda}(e)$ alle Umgebungen aus einem vollen Umgebungssystem von e durchläuft. Dann gibt es zu jedem Index λ ein Element u_{λ} bzw. f_{λ} aus $U_{\lambda}(e)$ bzw. F derart, daß

$$p = u_{\lambda}f_{\lambda}$$

ist. Nun ist aber das Einheitselement e ein Häufungspunkt der Menge $\{u_\lambda;\ \lambda\}$. Daher gibt es nach Hilfssatz 2 ein solches Element f aus F, daß es in der abgeschlossenen Hülle von p enthalten ist. Weil G dem Fréchetschen Trennungsaxiom genügt, so ist $f = p$; d.h. jeder Punkt aus $\bigcap_\lambda U_\lambda(e)F$ ist in F enthalten. Hieraus folgt sofort:

$$\bigcap_\lambda U_\lambda(e)F = F.$$

Gemäß Satz 1 ist G eine topologische Gruppe.

§2. Im Kleinen kompakte, Hausdorffsche halb-topologische Gruppen.

Hilfssatz 6. *Ein im Kleinen kompakter, Hausdorffscher Raum ist regulär.*

Beweis. Vgl. etwa Alexandroff-Hopf [1], S. 92.

In diesem Paragraphen bezeichnet G durchweg eine *im Kleinen kompakte, Hausdorffsche halb-topologische Gruppe.* Also ist jede kompakte Teilmenge aus G stets abgeschlossen. Ferner legen wir ein volles Umgebungssystem Σ_0 des Einheitselementes e aus G fest, und verstehen unter einer Umgebung von e stets eine solche aus Σ_0.

Hilfssatz 7. *Es seien A und B disjunkte nicht leere, kompakte Mengen aus G. Dann existiert eine Umgebung V von e derart, daß*

$$AV \cap BV = \phi$$

ist.

Beweis. Zunächst wollen wir zeigen, daß für eine passend gewählte Umgebung V_1 von e

$$AV_1 \cap B = \phi$$

gilt. Zu diesem Zweck nehmen wir das Gegenteil an. Dann ist für jede Umgebung U_λ aus dem vollen Umgebungssystem Σ_0 von e die Menge $AU_\lambda \cap B$ nicht leer. Für geeignete Punkte $a_\lambda \in A$, $u_\lambda \in U$ und $b_\lambda \in B$ gilt daher:

$$a_\lambda u_\lambda = b_\lambda .$$

Da offenbar e ein Häufungspunkt der Menge $\{u_\lambda;\ u_\lambda \in U_\lambda,\ U_\lambda \in \Sigma_0\}$ ist, so existiert nach Hilfssatz 2 ein Punkt a aus der abgeschlossenen

Hülle $\bar{A}_0$ der Menge $A_0 = \{a_\lambda;\ a_\lambda \in A\}$ derart, daß $a = ae$ zur abgeschlossenen Hülle $\bar{B}_0$ der Menge $B_0 = \{b_\lambda;\ b_\lambda \in B\}$ gehört; d.h. es ist $\bar{A}_0 \cap \bar{B}_0 \neq \phi$. Dies ist aber ein Widerspruch, weil $\bar{A}_0 \subseteqq A$, $\bar{B}_0 \subseteqq B$ sind und $A \cap B = \phi$ ist. Es muß also eine Umgebung V_1 aus Σ_0 geben, so daß

$$AV_1 \cap B = \phi$$

ist.

Nun ist aber G nach Voraussetzung im Kleinen kompakt und infolgedessen nach Hilfssatz 6 regulär. Daher kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\bar{V}_1$ kompakt und $A\bar{V}_1 \cap B = \phi$ ist. Da nach Hilfssatz 1 $A\bar{V}_1$ kompakt ist, so kann man wie oben die Existenz einer solchen Umgebung V_2 aus Σ_0 beweisen, daß

$$AV_1 \cap BV_2 = \phi$$

gilt. Für eine in $V_1 \cap V_2$ enthaltene Umgebung V aus Σ_0 gilt offenbar:

$$AV \cap BV = \phi.$$

Es sei $M(\neq \phi)$ eine kompakte Menge aus G und U eine Umgebung aus Σ_0. Dann heißt eine Punktfolge $p_0, p_1, \cdots\cdots, p_s$ aus M eine *U-Kette* auf M, wenn

$$p_{i+1} \in p_i U \quad \text{oder} \quad p_i \in p_{i+1} U \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, s-1)$$

gilt. Der Punkt p_0 bzw. p_s ist dabei der Anfangs- bzw. Endpunkt der U-Kette genannt.

Ein Punkt p aus M heiße „auf M mit einem Punkt a U-verkettet“, wenn es eine U-Kette auf M gibt, deren Anfangs- bzw. Endpunkt p bzw. a ist. Nach Definition ist ein Punkt a aus M mit einem Punkt p auf M U-verkettet, wenn p mit a so ist.

Für eine Umgebung U aus Σ_0 und für einen Punkt a aus M bezeichnen wir mit $M_U(a)$ die Menge aller derjenigen Punkte aus M, die auf M mit a U-verkettet sind.

Nun beweist man ohne Schwierigkeit folgende Tatsachen:

i) Sind p, q verschiedene Punkte aus $M_U(a)$, so ist q auf $M_U(a)$ mit p U-verkettet.

ii) Für Umgebungen U, V aus Σ_0 gilt stets:

$$M_V(a) \subseteqq M_U(a),$$

wenn $V \subseteqq U$ ist.

iii) $M_U(a)$ ist gleichzeitig offen und abgeschlossen im Relativraum M.

Als eine abgeschlossene Teilmenge aus der kompakten Menge M ist $M_U(a)$ auch kompakt. Ferner ist die (nicht leere) Menge

$$M_0(a) = \bigcap_{U \in \Sigma_0} M_U(a)$$

kompakt und relativ abgeschlossen im Relativraum M. Die Menge $M_0(a)$ heißt die *Nullkomponente* von a in M.

Sind nun $U_1, \cdots\cdots, U_n$ beliebig endlich viele Umgebungen aus Σ_0, so gilt für eine in $U_1 \cdots\cdots U_n$ enthaltene Umgebung V aus Σ_0

$$M_V(a) \leqq \bigcap_{i=1}^{n} M_{U_i}(a).$$

Gemäß der eben gezeigten Tatsache gilt folgender

Hilfssatz 8. *Ist O eine die Nullkomponente $M_0(a)$ von a enthaltende, offene Menge aus G, so existiert eine Umgebung U aus Σ_0 derart, daß*

$$M_U(a) \leqq O$$

ist.

Hilfssatz 9. *Für eine nicht leere, kompakte Menge M und einen Punkt a aus M ist die Nullkomponente $M_0(a)$ von a in M stets zusammenhängend.*

Beweis. Wir nehmen an, daß $M_0(a)$ nicht zusammenhängend ist. Dann existieren nicht leere, abgeschlossene Mengen A, B von der Art, daß $M_0(a) = A \cup B$ und $A \cap B = \phi$ ist. Nach Hilfssatz 7 gibt es eine Umgebung V aus Σ_0 derart, daß

$$AV \cap BV = \phi$$

ist. Nun greifen wir aus Σ_0 eine solche Umgebung V_0 heraus, daß $V_0^2 \leqq V$ ist. Weil $AV_0 \cup BV_0$ eine $M_0(a)$ enthaltende, offne Menge aus G ist, so gibt es nach Hilfssatz 8 eine Umgebung U aus Σ_0, für welche die Relation

$$AV_0 \cup BV_0 \geqq M_U(a)$$

gilt. Dabei kann man U von vornherein so wählen, daß $U \leqq V_0$ ist.

Nun sei a Element aus A. Dann ist ein Punkt b aus B auf M mit a U-verkettet. Es gibt also eine U-Kette $p_0 = a, p_1, \cdots\cdots, p_s = b$

aus $M_V(a)$. Nun kann man einen Index i $(0 \leqq i \leqq s-1)$ so bestimmen, daß

$$p_i \in AV_0 \qquad \text{und} \qquad p_{i+1} \in BV_0$$

ist. Ferner gilt:

$$p_i \in p_{i+1}U \qquad \text{oder} \qquad p_{i+1} \in p_i U$$

Setzt man dabei $p_i = a_i v_i$ $(a_i \in A,\ v_i \in V_0)$ und $p_{i+1} = b_{i+1}v_{i+1}$ $(b_{i+1} \in B,$ $v_{i+1} \in V_0)$, so erhält man:

$$a_i v_i \in b_{i+1}v_{i+1}U \subseteqq b_{i+1}V_0^2 \subseteqq b_{i+1}V$$

oder

$$b_{i+1}v_{i+1} \in a_i V;$$

hieraus folgt ohne weiteres, daß

$$AV \cap BV \neq \phi$$

ist. Dies ist aber ein Widerspruch. Daher muß $M_0(a)$ zusammenhängend sein.

Satz 2. *Es sei G eine im Kleinen kompakte, Hausdorffsche halbtopologische Gruppe, und U eine Umgebung des Einheitselementes e von G. Ferner sei die Komponente von e im Relativraum U einpunktig. Dann enthält U eine offene Untergruppe von G, und G ist diskontinuierlich.*

Beweis. Zunächst legen wir ein volles Umgebungssystem Σ_0 von e fest. Da nach Hilfssatz 6 G regulär ist, so gibt es eine Umgebung W aus Σ_0, deren abgeschlossene Hülle $\overline{W}$ in U enthalten ist. Ferner kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\overline{W}$ kompakt ist. Für eine Umgebung V aus Σ_0 bezeichnen wir mit $\overline{W}_V$ die Menge aller derjenigen Punkte aus $\overline{W}$, welche auf $\overline{W}$ mit e V-verkettet sind. Dann ist nach Hilfssatz 9 die Menge $\bigcap_{V \in \Sigma_0} \overline{W}_V$ zusammenhängend. Die letzte Menge muß aber in der Komponente von e aus dem Relativraum U enthalten sein; daraus folgt:

$$e = \bigcap_{V \in \Sigma_0} \overline{W}_V.$$

Nun sei V_0 eine Umgebung aus Σ_0, für welche die Relation $V_0^2 \subseteqq W$ gilt. Dann existiert nach Hilfssatz 8 eine Umgebung V_1 aus Σ_0 derart, daß $V_0 \supseteqq \overline{W}_{V_1}$ ist. Ersichtlich ist $\overline{W}^2_{V_1} \subseteqq V_0^2 \subseteqq \overline{W}$. Nun seien a, b Punkte aus $\overline{W}_{V_1}$. Dann gibt es zwei V_1-Ketten $p_0 = e, p_1, \cdots\cdots, p_s = a$ und $q_0 = e, q_1, \cdots\cdots, q_t = b$ auf $\overline{W}$. Nun sieht man sofort ein, daß die Punktfolge

$$p_0 = e, p_1, \cdots\cdots, p_s = a, \ p_{s+1} = aq_1, \cdots\cdots, p_{s+t} = ab$$

eine V_1-Kette auf $\overline{W}$ ist. Also ist $ab \in \overline{W}_{V_1}$. Mithin gilt für einen beliebigen Punkt x aus $\overline{W}_{V_1}$ stets:

$$x\overline{W}_{V_1} \subseteqq \overline{W}_{V_1}.$$

Weil $\overline{W}_{V_1}$ kompakt ist, so muß nach Hilfssatz 4 die Relation $x\overline{W}_{V_1} = \overline{W}_{V_1}$ bestehen; d.h. ein beliebiges Element x aus $\overline{W}_{V_1}$ besitzt sein Inverses auch in $\overline{W}_{V_1}$. Daher bildet $\overline{W}_{V_1}$ eine abgeschlossene Untergruppe von G.

Weil $\overline{W}_{V_1}$ relativ offen in $\overline{W}$ ist, so existiert eine solche offene Menge O aus G, daß $O \cap \overline{W} = \overline{W}_{V_1}$ ist. Hieraus folgt sofort:

$$\overline{W}_{V_1} \supseteqq O \cap \overline{W} \supseteqq O \cap V_0 \supseteqq \overline{W}_{V_1};$$

d.h. $\overline{W}_{V_1} = O \cap V_0$ ist eine offene Menge aus G. Somit ist bewiesen, daß U eine gleichzeitig offene und abgeschlossene Untergruppe von G enthält.

Nun sei W eine beliebige Umgebung von e. Dann ist e in einer beliebigen, in $W \cap U$ enthaltenen Umgebung V von e eine Komponente. Denn sonst würde die Komponente von e in U mehrpunktig sein. Man kann daher wie oben beweisen, daß V, um so mehr W, eine offene und abgeschlossene Untergruppe H von G enthält. Also muß G diskontinuierlich sein. Bezeichnet man nun mit $V_1 (\in \Sigma_0)$ eine in H enthaltene Umgebung von e, so gilt offenbar:

$$V_1^{-1} \subseteqq H^{-1} = H \subseteqq W.$$

Nach Hilfssatz 5 wird also G eine topologische Gruppe.

Wenn eine Menge diskontinuierlich ist, so ist jede nicht leere Teilmenge auch diskontinuierlich. Es gilt daher folgender

Satz 3. *Es sei G eine im Kleinen kompakte, Hausdorffsche halbtopologische Gruppe, und ferner sei G diskontinuierlich. Dann enthält jede Umgebung des Einheitselementes von G stets eine offene Untergruppe von G, und infolgedessen wird G eine topologische Gruppe.*

Ein topologischer Raum heißt *im Kleinen zusammenhängend*, wenn für einen beliebigen Punkt x aus R und für eine beliebige Umgebung $U(x)$ von x die Komponente von x in $U(x)$ eine offene Menge aus R bildet.

Satz 4. *Eine im Kleinen kompakte, im Kleinen zusammenhängende und Hausdorffsche halb-topologische Gruppe G ist eine topologische Gruppe.*

Beweis. Wenn G diskret ist, so ist G offenbar eine topologische Gruppe. Im folgenden nehmen wir also an, daß G nicht diskret ist.

Es sei $U(e)$ eine solche beliebige Umgebung des Einheitselementes e aus G, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{U(e)}$ von $U(e)$ kompakt ist. Bezeichnet dann K die Komponente von e in $U(e)$, so existiert eine Umgebung $W(e)$ von e derart, daß $W(e) \subsetneqq K$ ist, weil K eine offene Menge aus G ist und G nicht diskret ist. Die abgeschlossene Hülle $\overline{W(e)}$ von $W(e)$ ist von $W(e)$ verschieden, weil sonst wegen der Relation

$$\overline{W(e)} \cap K = W(e) \cap K = W(e) \subsetneqq K$$

K nicht zusammenhänged sein würde. Daher ist

$$\overline{W(e)} - W(e) \neq \phi.$$

Nun kann man ohne Einschränkung annehmen, daß für die oben gewählte Umgebung $U(e)$ von e von vornherein

$$U' = \overline{U(e)} - U(e) \neq \phi$$

gilt. Ist dann p_λ ein Punkt aus U', so existiert eine Umgebung $V_\lambda(e)$ von e und $U(p_\lambda)$ von p_λ derart, daß

$$V_\lambda(e) U(p_\lambda) \cap V_\lambda(e) = \phi$$

ist. Weil $\bigcup_{p_\lambda \in U'} U(p_\lambda) \geqq U'$ und U' kompakt ist, so kann man U' mit endlich vielen $U(p_1), U(p_2), \cdots\cdots, U(p_s)$ aus $\{U(p_\lambda)\,;\, p_\lambda \in U'\}$ überdecken. Bezeichnet man nun mit $V(e)$ eine in $\bigcap_{i=1}^{s} V_i(e)$ enthaltene Umgebung von e, so gilt offenbar:

$$\{V(e)(\bigcup_{i=1}^{s} U(p_i))\} \cap V(e) = \phi,$$

woraus die Relation $V(e)U' \cap V(e) = \phi$ folgt. Für die komponente K_V von e in $V(e)$ gilt also:

$$K_V U' \cap K_V = \phi.$$

Ist nun p ein solcher Punkt aus K_V, daß $p^{-1} \in U(e)$ ist, so ist

$$p^{-1} K_V \cap U' \neq \phi.$$

Denn sonst gälte offenbar:

$$p^{-1} K_V = p^{-1} K_V \cap G = (p^{-1} K_V \cap U) \cup (p^{-1} K_V \cap (G - \bar{U}));$$

weil $p^{-1} K_V \cap U \ni e$ und $p^{-1} K_V \cap (G - \bar{U}) \ni p^{-1}$ ist, so wäre $p^{-1} K_V$ nicht zusammenhängend, was aber ein Widerspruch ist. Da $p^{-1} K_V \cap U' \neq \phi$ ist, so schließt man sofort, daß

$$\phi \neq K_V \cap p U' \subseteqq K_V \cap K_V U' = \phi;$$

dies ist aber ein Widerspruch. Es muß also $K_V^{-1} \subseteqq U(e)$ sein.

Weil G im Kleinen zusammenhängend ist, so ist K_V eine offene Menge aus G, und es gilt für eine in K_V enthaltene Umgebung $V_0(e)$ von e:

$$V_0(e)^{-1} \subseteqq U(e);$$

d.h. nach Hilfssatz 5 ist G eine topologische Gruppe.

§3 Halb-topologische und topologische Körper.

Ein assoziativer Ring R heiße *halb-topologischer Ring,* wenn in R eine Topologie derart eingeführt ist, daß in bezug auf diese Topologie R einerseits eine additive halb-topologische Gruppe und anderseits eine multiplikative topologische Halbgruppe bildet. Wenn insbesondere R eine additive topologische Gruppe ist, so heißt R ein topologischer Ring. Ein Körper heißt *halb-topologischer Körper,* wenn er ein halb-topologischer Ring ist. Dabei braucht der Körper nicht notwendig kommutativ zu sein. Für ein von Null verschiedenes Element a aus einem halb-topologischen Körper K ist die Abbildung

$$x \to ax \qquad (\text{oder} \quad x \to xa)$$

ein Homöomorphismus von K auf sich selbst, wenn x alle Elemente aus K durchläuft. Es sei x ein beliebiges, von Null verschiedenes Element aus einem halb-topologischen Körper K, und $U(x^{-1})$ eine Umgebung von x^{-1} aus K. Gibt es dann eine Umgebung $V(x)$ von x

derart, daß $V(x)^{-1} \subseteqq U(x^{-1})$ ist, und bildet ferner K eine additive topologische Gruppe, so heißt K ein topologischer Körper. Wenn die Topologie eines halb-topologischen Körpers K diskret ist, so ist K offenbar ein topologischer Körper. Nun kann man sich leicht davon überzeugen, daß ein halb-topologischer Körper entweder diskontinuierlich oder zusammenhängend ist.

Eine nicht leere Teilmenge A aus einem halb-topologischen Ring heißt *rechtsbeschränkt*, wenn zu einer beliebigen Umgebung $U(0)$ des Nullelementes 0 stets eine solche Umgebung $V(0)$ von 0 existiert, daß

$$V(0)A \subseteqq U(0)$$

ist. Ebenso kann man die Linksbeschränktheit definieren. Eine Teilmenge aus einem halb-topologischen Ring heißt *beschränkt*, wenn sie gleichzeitig links- uud rechtsbeschränkt ist.

Hilfssatz 10. *Eine nicht leere, kompakte Teilmenge aus einem halb-topologischen Ring ist stets beschränkt.*

Beweis. Es sei B eine nicht leere, kompakte Teilmenge aus einem halb-topologischen Ring R. Dann gibt es für eine beliebige Umgebung $U(0)$ von 0 aus R und für einen beliebigen Punkt b aus B eine Umgebung $V_\lambda(0)$ von 0 und $V(b_\lambda)$ von b_λ derart, daß

$$V(b_\lambda)\, V_\lambda(0) \subseteqq U(0)$$

ist, weil $b_\lambda 0 = 0$ ist. Da $\{V(b_\lambda)\,;\; b_\lambda \in B\}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge B ist, so kann man daraus eine endliche Überdeckung $V(b_1), V(b_2), \cdots\cdots, V(b_n)$ von B herausgreifen. Offenbar gilt für eine in $\bigcap_{i=1}^{n} V_i(0)$ enthaltene Umgebung $V(0)$ von 0:

$$BV(0) \subseteqq \Big(\bigcup_{i=1}^{n} V(b_i)\Big)\, V(0) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \big(V(b_i)\, V_i(0)\big) \subseteq U(0)\,;$$

d.h. B ist linksbeschränkt. Ebenso kann man bestätigen, daß B auch rechtsbeschränkt ist.

Satz 5. *Ein im Kleinen kompakter, halb-topologischer Körper, welcher dem Fréchetschen Trennungsaxiom genügt, bildet einen Hausdorffschen Raum und genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Wir betrachten einen im Kleinen kompakten, halb-topologischen Körper K, dessen Topologie nicht diskret ist, weil sonst die Behauptung trivial ist.

Nun sei U eine Umgebung von 0, deren abgeschlossene Hülle $\bar{U}$ kompakt ist. Offenbar gibt es eine in U enthaltene Umgebung V von 0, welche von U verschieden ist. Da $\bar{U}$ kompakt und infolgedessen nach Hilfssatz 10 beschränkt ist, so existiert eine Umgebung W von 0 derart, daß

$$UW \subseteqq \bar{U}W \subseteqq V \subsetneqq U$$

ist. Weil K nicht diskret ist, so enthält W ein von Null verschiedenes Element p, für das ersichtlich

$$\bar{U} \supseteqq U \supsetneqq \bar{U}p \supseteqq Up \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq \bar{U}p^i \supseteqq Up^i \supsetneqq \cdots\cdots$$

gilt. Nun betrachten wir die absteigende Mengenfolge

$$\bar{U} \supsetneqq \bar{U}p \supsetneqq \bar{U}p^2 \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq \bar{U}p^i \supsetneqq \cdots\cdots.$$

Wie beim Beweis von Hilfssatz 4 besitzt dann die Menge $\{p^i;\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots\}$ einen Häufungspunkt q, und es gilt:

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{U}p^i = \bar{U}q.$$

Weil $\bar{U}p$ auch kompakt ist, so gilt auch:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{U}p^i = \bigcap_{i=0}^{\infty} (\bar{U}p)p^i = (\bar{U}p)q.$$

Ist also q von Null verschieden, so erhält man offenbar $\bar{U} = \bar{U}p$, was aber ein Widerspruch ist. Es muß also $q = 0$ sein, woraus die Relation

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{U}p^i = 0$$

folgt. Für eine beliebige, 0 enthaltende offene Menge O aus K gibt es eine natürliche Zahl N von der Art, daß für $n > N$

$$Up^n \subseteqq \bar{U}p^n \subseteqq O$$

ist, weil die Menge $\bar{U}p^i$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ in der kompakten Menge $\bar{U}$ abgeschlossen sind. Da die Mengen Up^i $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ alle offen sind, so bildet das Mengensystem $\{Up^i;\ i = 0, 1, 2, \cdots\cdots\}$ ein volles Umgebungssystem von 0. Daher genügt K als eine additive halbtopologische Gruppe dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.

Weil bei 0

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{U}p^i = 0$$

ist, so schließt man leicht, daß K einen Hausdorffschen Raum bildet.

Bemerkung Beim Beweis von Satz 5 hat man die Existenz eines Elementes $p \neq 0$ bewiesen, für das $Up^n \leqq O$ $(n > N)$ ist, wo O eine beliebige, 0 enthaltende offene Menge, und N eine von O abhängige natürliche Zahl ist.

Ist nun $u \neq 0$ ein Element aus U und W eine beliebige Umgebung von 0, so ist uW eine 0 enthaltende offene Menge aus K Es existiert also eine natürliche Zahl N derart, daß für $n > N$

$$up^n \in Up^n \subseteqq uW$$

gilt; d.h. für $n > N$ gilt:

$$p^n \in W.$$

Daher konvergiert die Folge $p, p^2, \cdots\cdots, p^n, \cdots\cdots$ zu 0. Wir nennen ein Element aus K *nilpotent,* wenn die Potenzen dieses Elementes zur Null konvergiert. Dann gilt folgender

Zusatz. *Ein im Kleinen kompakter, halb-topologischer Körper, welcher dem Fréchetschen Trennungsaxiom genügt, enthält stets ein von* 0 *verschiedenes, nilpotentes Element, falls die Topologie nicht diskret ist.*

Satz 6. *Ein im Kleinen kompakter, halb-topologischer Körper, welcher dem Fréchetschen Trennungsaxiom genügt, ist stets im Kleinen zusammenhängend, wenn er nicht diskontinuierlich ist.*

Beweis. K sei ein halb-topologischer Körper, welcher die Voraussetzung des Satzes erfüllt. Dann ist die Komponente K_0 von 0 in K von 0 verschieden, weil K nicht diskontinuierlich ist. Daraus folgt sofort, daß die Topologie von K nicht diskret ist.

Nun sei $V(0)$ eine Umgebung von 0, deren abgeschlossene Hülle $\overline{V(0)}$ kompakt ist. Dann ist die Komponente von 0 in $V(0)$ nicht einpunktig, weil sonst K, als eine additive halb-topologische Gruppe, nach Satz 2 diskontinuierlich sein müßte. Daher ist die Komponente C_0 von 0 in der Menge $\overline{V(0)}$ von 0 verschieden. Weil $\overline{V(0)}$ linksbeschränkt ist, so ist es auch C_0; es existiert also eine Umgebung $W(0)$ von 0 darart, daß $C_0W(0) \subseteqq V(0)$ ist. Weil

$$C_0W(0) = \bigcup_{C_0 \ni k_\lambda \neq 0} k_\lambda W(0)$$

ist, so ist $C_0W(0)$ eine offene Menge aus K. Da aber

$$C_0W(0) = \bigcup_{W \ni w_k \neq 0} C_0w_k$$

und jedes C_0w_k eine 0 enthaltende, zusammenhängende Menge ist, so ist $C_0W(0)$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge aus $V(0)$.

Nun sei $U(a)$ eine Umgebung von a aus K. Dann bezeichnen wir mit K_a die Komponente von a in $U(a)$. Zu jedem Punkt x aus K_a existiert eine Umgebung $V_x(0)$ von 0 derart, daß

$$V_x(0) + x \subseteqq U(a)$$

ist. Die Menge $V_x(0)$ enthält nach dem oben Bewiesenen eine offene zusammenhängende und 0 enthaltende Teilmenge $C_0(x)$, also ist die Menge $C_0(x) + x$ auch offen und zusammenhängend, und sie enthält x; daher ist : $C_0(x) + x \subseteqq K_a$. Offenbar gilt:

$$\bigcup_{K_a \ni x} (C_0(x) + x) = K_a;$$

d.h. die Komponente von a in $U(a)$ ist als die Vereinigung der offenen Menge $C_0(x) + x (x \in K_a)$ auch offen. Nach Definition ist also K im Kleinen zusammenhängend.

Satz 7. *Ein im Kleinen kompakter, halb-topologischer Körper K, welcher dem Fréchetschen Trennungsaxiom genügt, ist stets ein topologischer Körper.*

Beweis. Nach Satz 5 wird K ein Hausdorffscher Raum. Nun unterscheiden wir zwei Unterfälle.

1) *K ist diskontinuierlich.* Zunächst betrachten wir K als eine *additive* halb-topologische Gruppe. Dann wird K nach Satz 3 eine additive topologische Gruppe; d.h. K ist ein topologischer Ring. Nun ziehen wir die *multiplikative* Gruppe K^* aller von Null verschiedenen Elemente aus K in Betracht. Weil K^* als ein Relativraum von K eine multiplikative halb-topologische Gruppe ist, so beweist man nach Satz 3, daß K eine topologische Gruppe ist. Wegen des Fréchetschen Trennungsaxiomes ist K^* eine offene Menge aus K, also ist jede offene Menge aus K^* auch in K offen. Ist nun $U(a^{-1})$ eine Umgebung eines von Null verschiedenen Elementes a^{-1} aus K, so ist $U(a^{-1}) \cap K^*$ eine offene Menge aus K^*. Es existiert also eine Umgebung $V(a)$ von a aus K^*, für die $V(a)^{-1} \subseteqq U(a^{-1}) \cap K^*$ gilt. Da

$V(a)$ eine offene Menge aus K ist, so wird K nach Definition ein topologischer Körper.

2) *K ist nicht diskontinuierlich (also zusammenhängend).* In diesem Fall ist K nach Satz 6 im Kleinen zusammenhängend. Die additive halb-topologische Gruppe K wird nach Satz 4 eine topologische Gruppe. Wegen des Fréchetschen Trennungsaxiomes wird die Menge K^* aller von Null verschiedenen Elemente aus K im Kleinen zusammenhängend. Also ist die multiplikative halb-topologische Gruppe K^* nach Satz 4 eine topologische Gruppe. Ebenso wie bei 1) kann man beweisen, daß K ein topologischer Körper ist.

LITERATURVERZEICHNIS.

P. ALEXANDROFF-H. HOPF:

[1] Topologie, 1. Band. Berlin, 1935.

D. VAN DANTZIG:

[1] Studien over topologische Algebra. Amsterdam, H. J. Paris, 1931.

N. JACOBSON:

[1] (mit O. TAUSSKY) Locally compact rings. Proc. Nat. Acad. U.S.A., vol. 21 (1935).

[2] Totally disconnected locally compact rings. Amer. Journ. Math., vol. 58 (1936).

I. KAPLANSKY:

[1] Topological methods in valuation theory. Duke Math. Journ., vol. 14 (1947).

K. NUMAKURA:

[1] On bicompact semi-groups. Dieses Journ.

Y. OTOBE:

[1] Note on locally compact simple rings. Proc. Imp. Acad. Tokyo, vol. 20 (1944).

[2] On locally compact fields. Japa. Journ. Math., vol. 19 (1945).

L. PONTRJAGIN:

[1] Über stetige algebraische Körper. Ann. Math., vol. 33 (1932).

[2] Topological groups. Princeton, 1939.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received February 25, 1951*)