

数学の楽しみ (熊本大学 2004.12.2)

岡山大学理学部数学科 吉野雄二

正 n 角形をコンパスと定規で作図する

- 1 1 まず $n = 3, 4, 6$ のとき、正 n 角形を試しに作図してみよう。
- 2 2 コンパスと定規を使うと、角の 2 等分や垂線を引くこともできる。そのほかにどんなことが可能か考えてみよう。
- 3 3 古代からの作図問題：
 - 与えられた角の 3 等分問題
 - 与えられた円と同じ面積を持つ正方形の作図問題
 - デロス島の祭壇問題：「アポロの神はそれまでの立方体状の祭壇を立方体のまま 2 倍の体積にせよと要求された。」新しい祭壇の 1 辺の長さをもとの祭壇の 1 辺の長さから作図せよ。
 - 正 n 角形の作図問題

- 4 4 Évariste Galois (1811 年 10/25 ~ 1832 年 5/31) の理論によると、3 の最初の 3 つは不可能。作図可能な正 n 角形の n の条件も求めることができる。

正 5 角形は作図することができるが、正 7 角形については作図する方法はない。このことの理由を考えてみよう。

Remark: Galois 理論は現代数学の規範である。

- 5 5 正 5 角形を作図する。

本質的には $\cos 72^\circ$ を求めることにある。これを求めるにはいろいろな方法がある。

- 図形による方法。
- 三角関数の倍角、3 倍角の公式を使う方法。
- 方程式 $z^5 = 1$ を解く方法。

いずれにしても二次方程式を解くことに帰着する。結果は、

$$\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

6 正 5 角形をコンパスと定規で作図する方法を考えよう。

7 定規とは、与えられた 2 点を通る直線を引く道具。
コンパスとは、与えられた点を中心にして与えられた半径で円を描く道具。

8 長さ a と b の線分が与えられたとき、長さが $a \pm b, ab, b/a$ の線分を作図せよ。

9 長さ 1 と a の線分が与えられたとき、長さが \sqrt{a} の線分を作図せよ。

10 長さ a の線分が作図できるような実数 a の全体は四則演算、平方根で閉じている。
実数 a が、自然数と $+, -, \times, \div, \sqrt{\quad}$ の有限個の組み合わせであらわされる数であるとき、長さ a の線分はコンパスと定規で作図できる。
重要なことは、この逆も正しいということ。

11 正 7 角形が作図できない理由を考えてみよう。

正 7 角形を作図することは $\cos(\frac{360^\circ}{7})$ を求めること。これは、方程式 $z^7 = 1$ を解くことと同じ。本質的に、3 次方程式を解くことに帰着する。

一方、コンパスと定規では、直線と円しか描けない。それらの交点を作図によって求めた場合、結局 2 次方程式を解いて得られる点しか得られない。

12 作図可能な正多角形は？

オイラー関数 $\varphi(n)$ の定義：

自然数 n に対して、 $\varphi(n)$ を、 n と互いに素であるような 1 から $n - 1$ までの自然数の個数、と置く。

正 n 角形が作図可能であるための必要十分条件は、 $\varphi(n)$ が 2 のべきであること。

$$\varphi(5) = 4 = 2^2, \varphi(7) = 6, \varphi(17) = 16 = 2^4, \varphi(18) = 6$$

Remark: 有名なガウスの最初の論文は正 17 角形の作図法に関するものであった。