必勝法をもつゲーム

2016 年度オープンキャンパス
岡山大学理学部数学科
2016 年 8 月 5 日
石川雅雄

目次

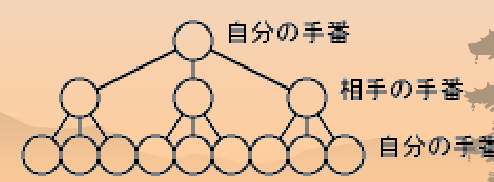
- 有限手順で終わるゲーム
- NIM (2進表示と必勝形)
- 佐藤のゲーム

ゲームの規則

- 先手と後手が交替にさす。
- パスは許されない。
- 始めの局面は決まっていて終りの局面も有限個しかなく有限回の操作で必ず終局を迎えることがわかっている。

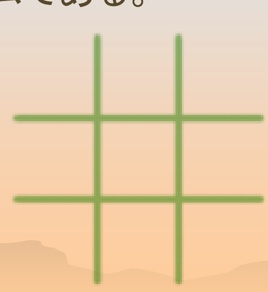
ゲーム木 (Game Tree)

- 有限回で終るゲームは、お互いがどの手を打ったかによってどのような局面が出現するかを調べていくことでゲーム展開を樹形図にできる。このように現在の局面から出現するすべての局面の関係をゲーム木と呼ぶ。



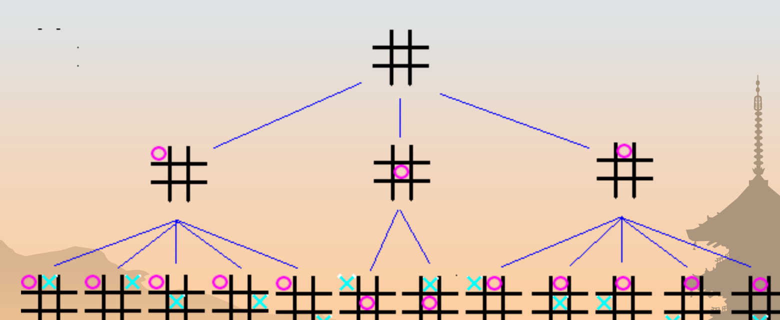
まるばつ (三目並べ)

- まるばつとは、3×3 の格子を用意し、二人が交互に「○」と「×」を書き込んでいき3つ並べるゲームである。



まるばつのゲーム木

- ゲーム木を描いてみよう。



必勝法を持つゲーム

- このようなゲームは必ず必勝法が存在することが証明できる。
- しかし必勝法が存在することと必勝法を具体的に計算する良いアルゴリズムが存在することとは別である。
- ほとんどのゲームの必勝法は「NP不完全問題」といわれ、良いアルゴリズム（必勝形を計算する方法）はないことが予想されている。

ミニマックス戦略

- ミニマックス探索とは、想定される最大の損害が最小になるように決断を行う戦略のこと。将棋、チェス、オセロなどといった完全情報ゲームをコンピュータに思考させるためのアルゴリズムとしても用いられるが、フォン・ノイマンが中心となって数学的に理論化されたゲーム理論において、打ち手を決定する際に適用されるルールの一つ。

オセロについての正式ルール

- **黒が先手です。**
- **打てる箇所がない場合パスになり、相手の手番になります。パスは何回でも出来ます。**
- **打てる箇所がある場合は必ず打たなければなりません。**
- **双方が打てなくなったら（通常は盤面が全て埋まったら）ゲーム終了です。盤上に空きがある場合折半します。石の多い方が勝者となります。**
  （日本オセロ連盟）

オセロ（リバーシ）の必勝法

- オセロ（リバーシ）は指す前に、先手が勝つか後手が勝つか決まっている。
- 交互ゲームは樹形図で考えると必ず、どちらが勝つか決定できる。
- ただし実際のゲームは場合の数が多すぎて樹形図が描けない。
- このような問題を、NP 問題という。

NP 問題

- P =「決定性 Turing 機械 (deterministic Turing machine)」を用いて「多項式時間で計算可能 (polynomial time computable)」な問題のクラス
- NP=「非決定性 Turing 機械 (non-deterministic Turing machine)」を用いて「多項式時間で計算可能 (polynomial time computable)」な問題のクラス

Sprague-Grundy 関数

- 有限回で終わるゲームは先手必勝か後手必勝か初めから決まっている。
- 各局面においてグランディ関数 (Sprague-Grundy function) が決まって、勝敗を決める。
- 一般のゲームでは、複雑すぎて計算できないが、特別なゲームでは、非常に簡単で美しい計算法が知られている。

NIM（三山崩し）のゲーム

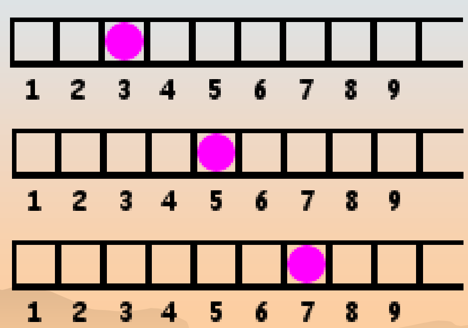
- 1×n のマス目がいくつかあって, 各マス目には, それぞれ1個ずつの石が置いてある。
- 先手と後手が交替に指す。
- 先手も後手も、どれかひとつのマス目において石を左に1マス以上動かす。
- パスは許されない。
- 最後の石を動かした者を勝者とする。

勝形と負形

- 自分の手番で、どのように指しても勝形にできない局面を負形という。
- 自分の手番で、ある手を指せば相手の負形にできるとき勝形という。
- 勝つためには、自分の手番で常に正しい手を指して勝形を作り続けなければならない。

NIM の遊び方

- 石を左方向に動かす。



NIM の必勝関数

- 例えば各山の石の数が、3, 5, 7であったとすると、これらを2進数で表わして

$$3_{(10)} = 011_{(2)}$$

$$5_{(10)} = 101_{(2)}$$

$$7_{(10)} = 111_{(2)}$$

と書く。

NIM の勝形と負形

- このとき、これらの2進表示を桁上がり無しで足すと

$$\begin{array}{r} 011 \\ 101 \\ \oplus 111 \\ \hline 001 \end{array} \qquad 011 \oplus 101 \oplus 111 = 001$$

足した結果が**必勝戦略関数**となる。

XOR (排他的論理和)

- 桁上がりなしで足す演算は XOR と書き、排他的論理和 (Exclusive OR) といわれる。
- 必勝関数を計算したとき、すべての桁が 0 ならば勝形、1つでも 1 があれば、負形である。

勝てる理由（必勝法の証明）

- **証明するべきこと**
  - XOR 計算の結果、すべての桁が0であるならば、これから、どのような石の取り方をしても、必ず1が現れる。
  - XOR 計算の結果、どこかの桁が1であるならば、これから、上手な石の取り方をすれば必ず XOR を 0にするこができる。

コンピュータ・プログラム

- 問題
  - 上の必勝法を証明すること。
  - 上の必勝関数の計算をプログラムすること
    - いくつかの数を入力したとき、必勝関数を計算して勝形であるか負形であるか判定する。
    - 必勝関数を計算して、勝形にするには、どの山から何個の石を取ったらよいかを見つける。

同数の石山が2個あるときは？

- 石の山が2つのみで、両方が同数の石のときは後手有利。
- 猿真似戦略で最後の石が取れる。
- 問題は、いつもこのケースではない。
- 次の石のときに、どう取るか？

$$(1,1,2),(2,3,2),(0,4,5),(5,0,7)$$

ペアを作ろう

- 石の山を 1, 2, 4, 8, 16 のような 2 のべき乗の数のペアにする。
- 次の石の組は先手有利か後手有利か？

$$(3,2,1),(4,3,2),(5,4,1),(6,5,3)$$

$$(5,4,3),(7,6,2),(6,4,2),(4,4,2)$$

練習問題

- 次のような石数の組のとき、どの山から何個取ればよいか？
- 石数をペアにしよう。

$$(5,4,2),(3,3,2),(4,3,2),(6,5,4)$$

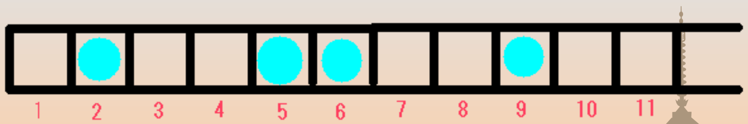
$$(7,5,3),(5,4,3),(4,2,1),(8,7,5)$$

佐藤のゲーム (Sato-Welter Game)

- 1×n のマス目に何個かの石が置いてある。
- 先手と後手が交替に指す。
- 先手も後手も、自分の手番で1つの石を左向きに石の置いてないマスへ（何マスでも）移動することができる。
- パスは許されない。
- 自分の手番で動かす石がなければ負け。

佐藤のゲームの例

- 次の盤面（マヤ図形）で佐藤のゲームをプレイしてみよう。



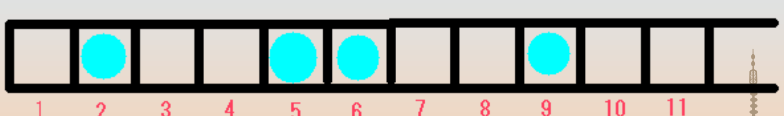
- 箱には左端から 1, 2, 3, 4…. という番号が振られていると考える。

Hook について

- ボールの入った箱 y と、y より左側にある空白の箱 x の組 (x,y) を hook と呼ぶことにする。
- ある hook (x,y) に対して y の箱番号から x の箱番号を引いて得られる正数を、この hook の長さといい $h(x,y)$ と書く。

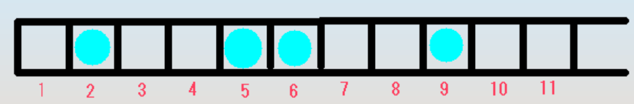
Hook の例題

- 最初の例



において、すべての hook を箱番号の組で表してみよう。

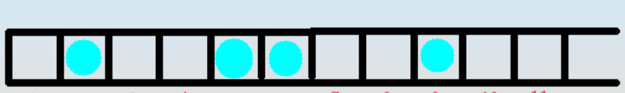
Hook の個数



- 上の図では hook を箱番号で表すと、全部で次の 12 個ある。

(1,2), (1,5), (3,5), (4,5), (1,6), (3,6), (4,6), (1,9), (3,9), (4,9), (7,9), (8,9).

Hook の長さ



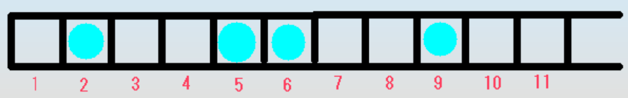
- この図に現れる hook の長さを書くと

$h(1,2)=1$, $h(1,5)=4$, $h(3,5)=2$, $h(4,5)=1$,
$h(1,6)=5$, $h(3,6)=3$, $h(4,6)=2$, $h(1,9)=8$,
$h(3,9)=6$, $h(4,9)=5$, $h(7,9)=2$, $h(8,9)=1$

必勝関数の計算法

- 与えられた局面で、すべての hook (x,y) に対して $h(x,y)$ と $h(x,y)-1$ を 2 進数で表して XOR を取ると必勝関数が得られる。
- 必勝関数のすべての桁が 0 ならば勝形、一箇所でも 1 があれば負形である。

必勝関数の計算

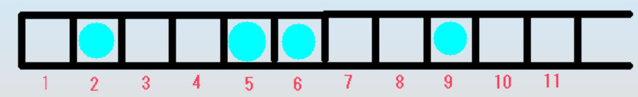


- hook の長さを 2 進数で書くと

  h(1,2)=0001, *h*(1,5)=0100, *h*(3,5)=0010, *h*(4,5)=0001, *h*(1,6)=0101, *h*(3,6)=0011, *h*(4,6)=0010, *h*(1,9)=1000, *h*(3,9)=0110, *h*(4,9)=0101, *h*(7,9)=0010, *h*(8,9)=0001

で全ての XOR を取ると 1010 となる。

Hook の長さ－1



- この図に現れる hook の長さマイナス1を書くと

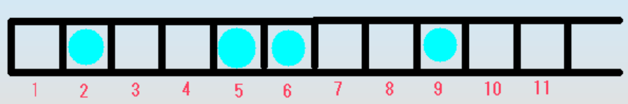
  h(1,2)-1=0, *h*(1,5)-1=3, *h*(3,5)-1=1,

  h(4,5)-1=0, *h*(1,6)-1=4, *h*(3,6)-1=2,

  h(4,6)-1=1, *h*(1,9)-1=7, *h*(3,9)-1=5,

  h(4,9)-1=4, *h*(7,9)-1=1, *h*(8,9)-1=0

Hook の長さ－1の2進数表示



- hook の長さマイナス1を書くと

  h(1,2)-1=000, *h*(1,5)-1=011, *h*(3,5)-1=001,

  h(4,5)-1=000, *h*(1,6)-1=100, *h*(3,6)-1=010,

  h(4,6)-1=001, *h*(1,9)-1=111, *h*(3,9)-1=101,

  h(4,9)-1=100, *h*(7,9)-1=001, *h*(8,9)-1=000.

だから XOR を取ると 010

必勝関数の計算

- したがって *h*(*x*,*y*) と *h*(*x*,*y*)-1 を 2 進数で表して, すべての XOR を取ると

  1010 XOR 0010 =1000

  だから、負形である (一箇所でも 1 があれば負形である)。

- 勝形にするには,どう取ればよいか？

コンピュータ・プログラム

- 必勝関数を計算するプログラムを作り、、勝形か負形かを判定しよう。
- 勝形にするには、どのように取ればよいかを計算するプログラムを作ろう。
- 上の XOR で計算される必勝関数が必勝戦略を与えることを証明してみよう。

参考文献

- 一松信『石取りゲームの数理』森北出版
- E.R.Berlekamp, J.H.Conway, and R.K.Guy,“Winning Ways for your Mathematical Plays”, A.K.Peters Ltd.
- J.H.Conway, “On Numbers and Games”, A.K.Peters Ltd.
- フック構造をもつゲームとアルゴリズム,
- 川中宣明, 改訂版,「数学」, 第63巻第4号, pp. 421-441, 2011年10月, 岩波書店.