行列式イデアルとその仲間たちの低次のシジジ

橋本　光靖

岡山大学

2016 年 5 月 2 日

行列式イデアル

R は可換環, $V = R^m$, $W = R^n$ とし, それぞれの標準基底を $e_1, \ldots, e_m$ および $f_1, \ldots, f_n$ とする. $x_{ij} = e_i \otimes f_j$ とすると x_{ij} は $V \otimes W$ の基底で, 対称多元環 $S = S(V \otimes W)$ は多項式環 $R[x_{ij}]$ になる. 変数を並べた (m, n) 行列 $X = (x_{ij}) \in M_{m,n}(S)$ を生成行列 (generic matrix) という.

$1 \leq t \leq \min(m, n)$ とする. $X = (x_{ij})$ の t 次の小行列式全部で生成される S のイデアル $I_t = I_t(X)$ を行列式イデアル (determinantal ideal) といい, S/I_t を行列式環 (determinantal ring) という.

行列式イデアル

R は可換環, $V = R^m$, $W = R^n$ とし, それぞれの標準基底を $e_1, \ldots, e_m$ および $f_1, \ldots, f_n$ とする. $x_{ij} = e_i \otimes f_j$ とすると x_{ij} は $V \otimes W$ の基底で, 対称多元環 $S = S(V \otimes W)$ は多項式環 $R[x_{ij}]$ になる. 変数を並べた (m, n) 行列 $X = (x_{ij}) \in M_{m,n}(S)$ を生成行列 (generic matrix) という.

$1 \le t \le \min(m, n)$ とする. $X = (x_{ij})$ の t 次の小行列式全部で生成される S のイデアル $I_t = I_t(X)$ を行列式イデアル (determinantal ideal) といい, S/I_t を行列式環 (determinantal ring) という.

行列式イデアルを調べる

Problem 1

行列式イデアルおよび行列式環を調べよ.

Example 2

$m = n = 5$ で $t = 2$ とする. R が標数 0 の体の時, I_t の生成元の個数は $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 100$ である. その S 加群としての第一シジジの生成元の個数は 800. 第二シジジの生成元の個数は 3, 075.

(非自明な) 行列式イデアルを扱うとすぐに巨大なものが現れる. 何らかの「統制」が必要.

行列式イデアルを調べる

Problem 1

行列式イデアルおよび行列式環を調べよ.

Example 2

$m = n = 5$ で $t = 2$ とする. R が標数 0 の体の時, I_t の生成元の個数は $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 100$ である. その S 加群としての第一シジジの生成元の個数は 800. 第二シジジの生成元の個数は $3,075$.

(非自明な) 行列式イデアルを扱うとすぐに巨大なものが現れる.
何らかの「統制」が必要.

行列式イデアルを調べる

Problem 1

行列式イデアルおよび行列式環を調べよ.

Example 2

$m = n = 5$ で $t = 2$ とする. R が標数 0 の体の時, I_t の生成元の個数は $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 100$ である. その S 加群としての第一シジジの生成元の個数は 800. 第二シジジの生成元の個数は $3,075$.

(非自明な) 行列式イデアルを扱うとすぐに巨大なものが現れる.
何らかの「統制」が必要.

行列式イデアルを調べる

Problem 1

行列式イデアルおよび行列式環を調べよ.

Example 2

$m = n = 5$ で $t = 2$ とする. R が標数 0 の体の時, I_t の生成元の個数は $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 100$ である. その S 加群としての第一シジジの生成元の個数は 800. 第二シジジの生成元の個数は $3,075$.

(非自明な) 行列式イデアルを扱うとすぐに巨大なものが現れる.
何らかの「統制」が必要.

行列式イデアルを調べる

Problem 1

行列式イデアルおよび行列式環を調べよ.

Example 2

$m = n = 5$ で $t = 2$ とする. R が標数 0 の体の時, I_t の生成元の個数は $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 100$ である. その S 加群としての第一シジジの生成元の個数は 800. 第二シジジの生成元の個数は $3,075$.

(非自明な) 行列式イデアルを扱うとすぐに巨大なものが現れる.
何らかの「統制」が必要.

行列式イデアルを調べる

Problem 1

行列式イデアルおよび行列式環を調べよ.

Example 2

$m = n = 5$ で $t = 2$ とする. R が標数 0 の体の時, I_t の生成元の個数は $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 100$ である. その S 加群としての第一シジジの生成元の個数は 800. 第二シジジの生成元の個数は $3,075$.

(非自明な) 行列式イデアルを扱うとすぐに巨大なものが現れる.
何らかの「統制」が必要.

表現論的アプローチ

$G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ とおく. G は $S = S(V \otimes W)$ に (R 代数自己同型として線型に) 作用する.

補題 1

I_t は S の G イデアルである. すなわち, I_t はイデアルであるとともに S の G 部分加群でもある.

G の作用を重視する表現論的アプローチ (と派生する幾何的および組合せ論的アプローチ) は I_t を調べるのに役に立って来た.

表現論的アプローチ

$G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ とおく. G は $S = S(V \otimes W)$ に (R 代数自己同型として線型に) 作用する.

補題 1

I_t は S の G イデアルである. すなわち, I_t はイデアルであるとともに S の G 部分加群でもある.

G の作用を重視する表現論的アプローチ (と派生する幾何的および組合せ論的アプローチ) は I_t を調べるのに役に立って来た.

表現論的アプローチ

$G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ とおく．G は $S = S(V \otimes W)$ に (R 代数自己同型として線型に) 作用する．

補題 1

I_t は S の G イデアルである．すなわち，I_t はイデアルであるとともに S の G 部分加群でもある．

G の作用を重視する表現論的アプローチ (と派生する幾何的および組合せ論的アプローチ) は I_t を調べるのに役に立って来た．

誘導関手 ind_B^H

$H := \mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_m$,

$$B := \{(a_{ij}) \in H \mid i < j \Rightarrow a_{ij} = 0\},$$

$$U := \{(a_{ij}) \in B \mid a_{ii} = 1 \quad (1 \leq i \leq m)\},$$

$$T := \{(a_{ij}) \in H \mid i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0\}.$$

制限関手 $\mathrm{res}_B^H : H\,\mathrm{Mod} \to B\,\mathrm{Mod}$ は右随伴関手 $\mathrm{ind}_B^H : B\,\mathrm{Mod} \to H\,\mathrm{Mod}$ を持つ.

誘導関手 ind_B^H

$H := \mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_m$,

$$B := \{(a_{ij}) \in H \mid i < j \Rightarrow a_{ij} = 0\},$$

$$U := \{(a_{ij}) \in B \mid a_{ii} = 1 \quad (1 \leq i \leq m)\},$$

$$T := \{(a_{ij}) \in H \mid i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0\}.$$

制限関手 $\mathrm{res}_B^H : H\,\mathrm{Mod} \to B\,\mathrm{Mod}$ は右随伴関手 $\mathrm{ind}_B^H : B\,\mathrm{Mod} \to H\,\mathrm{Mod}$ を持つ.

誘導関手 ind_B^H

$H := \mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_m$,

$$B := \{(a_{ij}) \in H \mid i < j \Rightarrow a_{ij} = 0\},$$

$$U := \{(a_{ij}) \in B \mid a_{ii} = 1 \quad (1 \le i \le m)\},$$

$$T := \{(a_{ij}) \in H \mid i \ne j \Rightarrow a_{ij} = 0\}.$$

制限関手 $\mathrm{res}_B^H : H\,\mathrm{Mod} \to B\,\mathrm{Mod}$ は右随伴関手 $\mathrm{ind}_B^H : B\,\mathrm{Mod} \to H\,\mathrm{Mod}$ を持つ.

誘導関手 ind_B^H

$H := \mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_m$,

$$B := \{(a_{ij}) \in H \mid i < j \Rightarrow a_{ij} = 0\},$$

$$U := \{(a_{ij}) \in B \mid a_{ii} = 1 \quad (1 \le i \le m)\},$$

$$T := \{(a_{ij}) \in H \mid i \ne j \Rightarrow a_{ij} = 0\}.$$

制限関手 $\mathrm{res}_B^H : H\,\mathrm{Mod} \to B\,\mathrm{Mod}$ は右随伴関手
$\mathrm{ind}_B^H : B\,\mathrm{Mod} \to H\,\mathrm{Mod}$ を持つ.

誘導関手 ind_B^H

$H := \mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_m$,

$$B := \{(a_{ij}) \in H \mid i < j \Rightarrow a_{ij} = 0\},$$

$$U := \{(a_{ij}) \in B \mid a_{ii} = 1 \quad (1 \leq i \leq m)\},$$

$$T := \{(a_{ij}) \in H \mid i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0\}.$$

制限関手 $\mathrm{res}_B^H : H\,\mathrm{Mod} \to B\,\mathrm{Mod}$ は右随伴関手
$\mathrm{ind}_B^H : B\,\mathrm{Mod} \to H\,\mathrm{Mod}$ を持つ.

B 加群 R_λ

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m$ とする．R 加群 R に

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot x = a_{11}^{\lambda_1} a_{22}^{\lambda_2} \cdots a_{mm}^{\lambda_m} x \qquad (x \in R)$$

で B 加群構造を入れたものを R_λ で表す．

Dual Weyl module (Schur module)

$\mathrm{ind}_B^H R_\lambda$ を $\nabla(\lambda) = \nabla_H(\lambda)$ と表す. λ が dominant (つまり $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$) でない限り $\nabla(\lambda) = 0$. λ が dominant のとき, $\nabla(\lambda)$ は最高ウェート λ の dual Weyl module (Schur module) という. R が体のとき,

$$\{\mathrm{soc}(\nabla(\lambda)) \mid \lambda \text{ は dominant}\}$$

は H の既約表現の全体となる. さらに標数 0 ならば $\nabla(\lambda)$ が既約である.

Dual Weyl module (Schur module)

$\mathrm{ind}_B^H R_\lambda$ を $\nabla(\lambda) = \nabla_H(\lambda)$ と表す. λ が dominant (つまり $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$) でない限り $\nabla(\lambda) = 0$. λ が dominant のとき, $\nabla(\lambda)$ は最高ウェート λ の dual Weyl module (Schur module) という. R が体のとき,

$$\{\mathrm{soc}(\nabla(\lambda)) \mid \lambda \text{ は dominant}\}$$

は H の既約表現の全体となる. さらに標数 0 ならば $\nabla(\lambda)$ が既約である.

Akin–Buchbaum–Weyman の表記

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ は分割とする．つまり，非負整数の広義単調減少列で $\lambda_i = 0$ $(i \gg 0)$ とする．$\lambda_1 > m$ のとき $L_\lambda V = 0$ と定義する．一方，$\lambda_1 \leq m$ のとき，λ の転置 $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m)$ を

$$\tilde{\lambda}_i = \#\{j \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \lambda_j \geq i\}$$

で定め，$L_\lambda V := \nabla_H(\tilde{\lambda})$ とおく．

定理 2 (Akin–Buchsbaum–Weyman)

$L_\lambda V$ は R 加群として有限生成自由である (基底も標準盤と呼ばれる具体的なもので与えられている)．$R \to R'$ が環準同型のとき，$R' \otimes_R L_\lambda V \cong L_\lambda(R' \otimes_R V)$.

Akin–Buchbaum–Weyman の表記

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ は分割とする．つまり，非負整数の広義単調減少列で $\lambda_i = 0$ $(i \gg 0)$ とする．$\lambda_1 > m$ のとき $L_\lambda V = 0$ と定義する．一方，$\lambda_1 \leq m$ のとき，λ の転置 $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m)$ を

$$\tilde{\lambda}_i = \#\{j \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \lambda_j \geq i\}$$

で定め，$L_\lambda V := \nabla_H(\tilde{\lambda})$ とおく．

定理 2 (Akin–Buchsbaum–Weyman)

$L_\lambda V$ は R 加群として有限生成自由である (基底も標準盤と呼ばれる具体的なもので与えられている)．$R \to R'$ が環準同型のとき，$R' \otimes_R L_\lambda V \cong L_\lambda(R' \otimes_R V)$.

Schur module の別の見方

非負整数列の全体に辞書式順序 $<$ を入れておく．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ $(\lambda_i = 0 \quad (i \gg 0))$ に対して，

$$\bigwedge\nolimits_\lambda V = \bigwedge\nolimits^{\lambda_1} V \otimes_R \bigwedge\nolimits^{\lambda_2} V \otimes_R \cdots$$

とおく．

補題 3 (Akin–Buchsbaum–Weyman)

完全列

$$0 \to \sum_{\mu > \lambda} \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_H(\bigwedge_\mu V, \bigwedge_\lambda V)} \mathrm{Im}\,\phi \to \bigwedge\nolimits_\lambda V \xrightarrow{d_\lambda} L_\lambda V \to 0$$

が存在する．

Schur module の別の見方

非負整数列の全体に辞書式順序 $<$ を入れておく. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ $(\lambda_i = 0 \quad (i \gg 0))$ に対して,

$$\bigwedge\nolimits_\lambda V = \bigwedge\nolimits^{\lambda_1} V \otimes_R \bigwedge\nolimits^{\lambda_2} V \otimes_R \cdots$$

とおく.

補題 3 (Akin–Buchsbaum–Weyman)

完全列

$$0 \to \sum_{\mu > \lambda} \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_H(\bigwedge_\mu V, \bigwedge_\lambda V)} \mathrm{Im}\,\phi \to \bigwedge\nolimits_\lambda V \xrightarrow{d_\lambda} L_\lambda V \to 0$$

が存在する.

Cauchy のフィルトレーション (1)

$r \geq 0$ について

$$\Theta_r : \bigwedge^r V \otimes_R \bigwedge^r W \to S_r(V \otimes_R W)$$

を $\Theta_r(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge w_r) = \det(v_i \otimes w_j)$ で定める. Θ_r は G 線型である.

Cauchy のフィルトレーション (2)

非負整数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ で $\sum_i \lambda_i = r$ であるものに対して,

$$\Theta_\lambda : \bigwedge_\lambda V \otimes_R \bigwedge_\lambda W \to S_r(V \otimes W)$$

を

$$\bigwedge_\lambda V \otimes \bigwedge_\lambda W \xrightarrow{T} \bigwedge^{\lambda_1} V \otimes \bigwedge^{\lambda_1} W \otimes \bigwedge^{\lambda_2} V \otimes \bigwedge^{\lambda_2} W \otimes \cdots \xrightarrow{\Theta_{\lambda_1} \otimes \Theta_{\lambda_2} \otimes \cdots} S_{\lambda_1}(V \otimes W) \otimes S_{\lambda_2}(V \otimes W) \otimes \cdots \xrightarrow{m} S_r(V \otimes W)$$

の合成として定義する．ここに T はテンサーの入れ替え, m は掛け算.

Cauchy のフィルトレーション (3)

分割 (dominant な非負整数列) $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ ($\lambda_i = 0$ ($i \gg 0$)) で $\sum_i \lambda_i = r$ であるもの全体を Γ_r で表す. $\lambda \in \Gamma_r$ について

$$\mathcal{M}_\lambda = \sum_{\mu \in \Gamma_r,\, \mu \geq \lambda} \operatorname{Im} \Theta_\mu,$$

$$\dot{\mathcal{M}}_\lambda = \sum_{\mu \in \Gamma_r,\, \mu > \lambda} \operatorname{Im} \Theta_\mu$$

とおく.

Cauchy のフィルトレーション (4)

(1)

$$0 \subset \mathcal{M}_{(r)} \subset \mathcal{M}_{(r-1,1)} \subset \cdots \subset \mathcal{M}_{(1,1,\ldots,1)} = S_r(V \otimes W)$$

は G 加群としてのフィルトレーション.

(2) $\mathcal{M}_{(t,1,1,\ldots,1)}$ はイデアル I_t の r 次の成分 $I_{t,r}$ に一致する.

Cauchy のフィルトレーション (4)

(1)

$$0 \subset \mathcal{M}_{(r)} \subset \mathcal{M}_{(r-1,1)} \subset \cdots \subset \mathcal{M}_{(1,1,\ldots,1)} = S_r(V \otimes W)$$

は G 加群としてのフィルトレーション.

(2) $\mathcal{M}_{(t,1,1,\ldots,1)}$ はイデアル I_t の r 次の成分 $I_{t,r}$ に一致する.

Akin–Buchsbaum–Weyman による Cauchy の公式

$$\bigwedge_\lambda V \otimes \bigwedge_\lambda W \xrightarrow{\Theta_r} \mathcal{M}_\lambda \to \mathcal{M}_\lambda/\dot{\mathcal{M}}_\lambda$$

の合成射はラプラス展開を考えると分かるように
$d_\lambda \otimes d_\lambda : \bigwedge_\lambda V \otimes \bigwedge_\lambda W \to L_\lambda V \otimes L_\lambda W$ を経由し,

$$\bar{\Theta}_\lambda : L_\lambda V \otimes L_\lambda W \to \mathcal{M}_\lambda/\dot{\mathcal{M}}_\lambda$$

を誘導する.

定理 4 (Akin–Buchsbaum–Weyman)

$\bar{\Theta}_\lambda$ は同型である.

Akin–Buchsbaum–Weyman による Cauchy の公式

$$\bigwedge_\lambda V \otimes \bigwedge_\lambda W \xrightarrow{\Theta_r} \mathcal{M}_\lambda \to \mathcal{M}_\lambda / \dot{\mathcal{M}}_\lambda$$

の合成射はラプラス展開を考えると分かるように
$d_\lambda \otimes d_\lambda : \bigwedge_\lambda V \otimes \bigwedge_\lambda W \to L_\lambda V \otimes L_\lambda W$ を経由し,

$$\bar{\Theta}_\lambda : L_\lambda V \otimes L_\lambda W \to \mathcal{M}_\lambda / \dot{\mathcal{M}}_\lambda$$

を誘導する.

定理 4 (Akin–Buchsbaum–Weyman)

$\bar{\Theta}_\lambda$ は同型である.

ひとつの系

系 5

S/I_t は R 自由加群である (より強く, distributive lattice 上の ASL になることも standard basis theorem という $L_\lambda V$ の基底を与える定理を合わせると出る).

Proof.

$S_r/I_{t,r}$ が R 自由加群であることを各 r についていえばよい.
$S_r/I_{t,r} = \mathcal{M}_{(1^r)}/\mathcal{M}_{(t,1^{r-t})}$ には適当なフィルトレーションが入って, その associated graded module は $\bigoplus_{\lambda\in\Gamma_r,\ \lambda_1<t} L_\lambda V \otimes L_\lambda W$. これは R 自由なので, $S_r/I_{t,r}$ も R 自由である. □

ひとつの系

系 5

S/I_t は R 自由加群である (より強く, distributive lattice 上の ASL になることも standard basis theorem という $L_\lambda V$ の基底を与える定理を合わせると出る).

Proof.

$S_r/I_{t,r}$ が R 自由加群であることを各 r についていえばよい.
$S_r/I_{t,r} = \mathcal{M}_{(1^r)}/\mathcal{M}_{(t,1^{r-t})}$ には適当なフィルトレーションが入って, その associated graded module は $\bigoplus_{\lambda \in \Gamma_r,\, \lambda_1 < t} L_\lambda V \otimes L_\lambda W$. これは R 自由なので, $S_r/I_{t,r}$ も R 自由である. □

Kempf の特異点解消 (1)

$R = k$ は代数閉体とする. $\mathcal{G}$ は V の $(t-1)$-quotients のなす Grassmann 多様体とし,

$$0 \to \mathcal{R} \to V \xrightarrow{p} \mathcal{Q} \to 0$$

をその tautological sequence とする. Kempf の消滅定理から容易に分割 λ について,

$$H^i(\mathcal{G}, L_\lambda \mathcal{Q}) = \begin{cases} L_\lambda V & (\lambda_1 < t,\ i = 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と分かる. この事実と Cauchy's formula から次を得る.

Kempf の特異点解消 (2)

命題 6

$H^0(\mathcal{G}, S(p \otimes 1_W)) : S(V \otimes W) \to H^0(\mathcal{G}, S(\mathcal{Q} \otimes W))$ は同型

$$S/I_t \to H^0(\mathcal{G}, S(\mathcal{Q} \otimes W))$$

を誘導する．また，$H^i(\mathcal{G}, S(Q \otimes W)) = 0 \ (i > 0)$ である．

Kempf の特異点解消 (3)

$\mathcal{G}$ 上のベクトル束 $Z = \underline{\mathrm{Spec}}\, S(\mathcal{Q} \otimes W) = \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}, W^*)$ から $\mathrm{Spec}\, S = \mathrm{Hom}(V, W^*)$ への射を

$$((f : V \to Q), (\phi : Q \to W^*)) \mapsto (\phi \circ f : V \to W^*)$$

で定義する．容易にこの射は $Y_t = \mathrm{Spec}\, S/I_t$ を経由し, $\pi : Z \to Y_t$ を誘導する．命題 6 から (標数 0 では容易に, 正標数では canonical module についての議論を経て), 次を得る．

Kempf の特異点解消 (4)

定理 7 (Hochster–Eagon, Kempf)

$\pi : Z \to Y_t$ は rational resolution. 特に Y_t は有理特異点を持ち，Cohen–Macaulay normal.

注意 8

(1) おまけで $\dim Y_t = \dim Z = mn - (m-t+1)(n-t+1)$ もわかる．この特異点解消は，Lascoux の標数 0 での極小自由分解の仕事で極めて重要な役割を果たす．

(2) S/I_t は F-regular (type) (Hochster–Huneke).

(3) S/I_t が Gorenstein になる条件は $t=1$ または $n=m$ (Svanes).

(4) S/I_t の class group は $\mathbb{Z}$ (Bruns).

Kempf の特異点解消 (4)

定理 7 (Hochster–Eagon, Kempf)

$\pi : Z \to Y_t$ は rational resolution．特に Y_t は有理特異点を持ち，Cohen–Macaulay normal.

注意 8

(1) おまけで $\dim Y_t = \dim Z = mn - (m-t+1)(n-t+1)$ もわかる．この特異点解消は，Lascoux の標数 0 での極小自由分解の仕事で極めて重要な役割を果たす．

(2) S/I_t は F-regular (type) (Hochster–Huneke).

(3) S/I_t が Gorenstein になる条件は $t=1$ または $n=m$ (Svanes).

(4) S/I_t の class group は $\mathbb{Z}$ (Bruns).

Kempf の特異点解消 (4)

定理 7 (Hochster–Eagon, Kempf)

$\pi : Z \to Y_t$ は rational resolution．特に Y_t は有理特異点を持ち，Cohen–Macaulay normal.

注意 8

(1) おまけで $\dim Y_t = \dim Z = mn - (m-t+1)(n-t+1)$ もわかる．この特異点解消は, Lascoux の標数 0 での極小自由分解の仕事で極めて重要な役割を果たす.

(2) S/I_t は F-regular (type) (Hochster–Huneke).

(3) S/I_t が Gorenstein になる条件は $t=1$ または $n=m$ (Svanes).

(4) S/I_t の class group は $\mathbb{Z}$ (Bruns).

Kempf の特異点解消 (4)

定理 7 (Hochster–Eagon, Kempf)

$\pi : Z \to Y_t$ は rational resolution. 特に Y_t は有理特異点を持ち, Cohen–Macaulay normal.

注意 8

(1) おまけで $\dim Y_t = \dim Z = mn - (m - t + 1)(n - t + 1)$ もわかる. この特異点解消は, Lascoux の標数 0 での極小自由分解の仕事で極めて重要な役割を果たす.

(2) S/I_t は F-regular (type) (Hochster–Huneke).

(3) S/I_t が Gorenstein になる条件は $t = 1$ または $n = m$ (Svanes).

(4) S/I_t の class group は $\mathbb{Z}$ (Bruns).

Kempf の特異点解消 (4)

定理 7 (Hochster–Eagon, Kempf)

$\pi : Z \to Y_t$ は rational resolution. 特に Y_t は有理特異点を持ち, Cohen–Macaulay normal.

注意 8

(1) おまけで $\dim Y_t = \dim Z = mn - (m-t+1)(n-t+1)$ もわかる. この特異点解消は, Lascoux の標数 0 での極小自由分解の仕事で極めて重要な役割を果たす.

(2) S/I_t は F-regular (type) (Hochster–Huneke).

(3) S/I_t が Gorenstein になる条件は $t = 1$ または $n = m$ (Svanes).

(4) S/I_t の class group は $\mathbb{Z}$ (Bruns).

自由分解の構成問題

S/I_t を次数 S 加群と見て（次数付）自由分解

$$\mathbb{F} : \cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \to S \to S/I_t \to 0$$

で各 F_i が次数付有限生成自由 S 加群であるものを具体的に構成したい. ここまでの議論から I_t は perfect of codimension $(m-t+1)(n-t+1)$ なので, 長さは $(m-t+1)(n-t+1)$ でとれる.

自由分解の構成問題

S/I_t を次数 S 加群と見て（次数付）自由分解

$$\mathbb{F} : \cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \to S \to S/I_t \to 0$$

で各 F_i が次数付有限生成自由 S 加群であるものを具体的に構成したい．ここまでの議論から I_t は perfect of codimension $(m-t+1)(n-t+1)$ なので，長さは $(m-t+1)(n-t+1)$ でとれる．

極小自由分解

S/I_t の自由分解 $\mathbb{F}$ は $\mathbb{F} \otimes_S R$ の boundary map がすべて 0 のとき，極小自由分解であるという．

注意 9

(1) R が体であれば極小自由分解は存在する．

(2) $\mathbb{F}$ が S/I_t の自由分解で R' が R 代数の時，$\mathbb{F} \otimes_R R'$ は $(S/I_t) \otimes_R R'$ の自由分解で，$\mathbb{F}$ が極小なら $\mathbb{F} \otimes_R R'$ も極小．

極小自由分解

S/I_t の自由分解 $\mathbb{F}$ は $\mathbb{F} \otimes_S R$ の boundary map がすべて 0 のとき, 極小自由分解であるという.

注意 9

(1) R が体であれば極小自由分解は存在する.

(2) $\mathbb{F}$ が S/I_t の自由分解で R' が R 代数の時, $\mathbb{F} \otimes_R R'$ は $(S/I_t) \otimes_R R'$ の自由分解で, $\mathbb{F}$ が極小なら $\mathbb{F} \otimes_R R'$ も極小.

歴史

簡単のため $m \leq n$ とする.

(1) $t = 1$ のときは $S/I_1 = R$ は変数 x_{ij} の Koszul 複体を極小自由分解に持つ.

(2) $t = m$ のとき, $\mathrm{pd}_S S/I_t = n - m + 1$. 極小自由分解を Eagon–Northcott が構成している. Buchsbaum は Eagon–Northcott resolution が Schur complex のとても簡単な場合である $\bigwedge^{n-m}\Psi$ (Ψ は generic map) によって書けることを示した.

(3) $t = m - 1$, $m = n$ のときは $\mathrm{pd}_S S/I_t = 4$. Gulliksen–Negård が極小自由分解を構成している.

(4) より一般に $t = m - 1$ のときに, Akin–Buchsbaum–Weyman は Schur complex を用いて極小自由分解の存在を (任意の R に対して) 示し, その具体的記述にある程度成功した.

歴史

簡単のため $m \le n$ とする.

(1) $t = 1$ のときは $S/I_1 = R$ は変数 x_{ij} の Koszul 複体を極小自由分解に持つ.

(2) $t = m$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = n - m + 1$. 極小自由分解を Eagon–Northcott が構成している. Buchsbaum は Eagon–Northcott resolution が Schur complex のとても簡単な場合である $\bigwedge^{n-m} \Psi$ (Ψ は generic map) によって書けることを示した.

(3) $t = m - 1$, $m = n$ のときは $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 4$. Gulliksen–Negård が極小自由分解を構成している.

(4) より一般に $t = m - 1$ のときに, Akin–Buchsbaum–Weyman は Schur complex を用いて極小自由分解の存在を (任意の R に対して) 示し, その具体的記述にある程度成功した.

歴史

簡単のため $m \leq n$ とする.

(1) $t = 1$ のときは $S/I_1 = R$ は変数 x_{ij} の Koszul 複体を極小自由分解に持つ.

(2) $t = m$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = n - m + 1$. 極小自由分解を Eagon–Northcott が構成している. Buchsbaum は Eagon–Northcott resolution が Schur complex のとても簡単な場合である $\bigwedge^{n-m} \Psi$ (Ψ は generic map) によって書けることを示した.

(3) $t = m - 1$, $m = n$ のときは $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 4$. Gulliksen–Negård が極小自由分解を構成している.

(4) より一般に $t = m - 1$ のときに, Akin–Buchsbaum–Weyman は Schur complex を用いて極小自由分解の存在を (任意の R に対して) 示し, その具体的記述にある程度成功した.

歴史

簡単のため $m \leq n$ とする.

(1) $t = 1$ のときは $S/I_1 = R$ は変数 x_{ij} の Koszul 複体を極小自由分解に持つ.

(2) $t = m$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = n - m + 1$. 極小自由分解を Eagon–Northcott が構成している. Buchsbaum は Eagon–Northcott resolution が Schur complex のとても簡単な場合である $\bigwedge^{n-m} \Psi$ (Ψ は generic map) によって書けることを示した.

(3) $t = m - 1$, $m = n$ のときは $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 4$. Gulliksen–Negård が極小自由分解を構成している.

(4) より一般に $t = m - 1$ のときに, Akin–Buchsbaum–Weyman は Schur complex を用いて極小自由分解の存在を (任意の R に対して) 示し, その具体的記述にある程度成功した.

標数 0

標数一般での前記の発展の間に, 標数 0 で大きな発展があった. $R=\mathbb{Q}$ のとき, G が linearly reductive なので, 極小自由分解 $\mathbb{F}$ は存在して, (G,S) 加群の複体の構造を一意的に持つ. P. Roberts は $\mathbb{F}$ の候補となる複体を構成した (unpublished). A. Lascoux はすべての i について

$$\mathbb{F}_i \otimes_S R = \mathrm{Tor}_i^S(S/I_t, R)$$

の G 加群としての既約分解を決定し, $\mathbb{F}$ の boundary map の候補を与えた (Kempf の特異点解消と Borel–Weil–Bott の定理を用いた). Pragacz と Weyman は $\mathbb{F}$ の boundary map の記述に成功した.

標数 0

標数一般での前記の発展の間に, 標数 0 で大きな発展があった. $R = \mathbb{Q}$ のとき, G が linearly reductive なので, 極小自由分解 $\mathbb{F}$ は存在して, (G, S) 加群の複体の構造を一意的に持つ. P. Roberts は $\mathbb{F}$ の候補となる複体を構成した (unpublished). A. Lascoux はすべての i について

$$\mathbb{F}_i \otimes_S R = \mathrm{Tor}_i^S(S/I_t, R)$$

の G 加群としての既約分解を決定し, $\mathbb{F}$ の boundary map の候補を与えた (Kempf の特異点解消と Borel–Weil–Bott の定理を用いた). Pragacz と Weyman は $\mathbb{F}$ の boundary map の記述に成功した.

標数 0

標数一般での前記の発展の間に, 標数 0 で大きな発展があった. $R=\mathbb{Q}$ のとき, G が linearly reductive なので, 極小自由分解 $\mathbb{F}$ は存在して, (G,S) 加群の複体の構造を一意的に持つ. P. Roberts は $\mathbb{F}$ の候補となる複体を構成した (unpublished). A. Lascoux はすべての i について

$$\mathbb{F}_i \otimes_S R = \mathrm{Tor}_i^S(S/I_t, R)$$

の G 加群としての既約分解を決定し, $\mathbb{F}$ の boundary map の候補を与えた (Kempf の特異点解消と Borel–Weil–Bott の定理を用いた). Pragacz と Weyman は $\mathbb{F}$ の boundary map の記述に成功した.

1985 年

日・米セミナー開催される. D. A. Buchsbaum 来日. 1985 年の時点で上記のように, S/I_t の極小自由分解の構成の問題は標数 0 で完全に解決されていた一方, 標数一般では $2 \leq t \leq m-2$ では極小自由分解が $R = \mathbb{Z}$ で存在するかどうか分かっていなかった.

極小自由分解の存在

命題 10 (P. Roberts)

n は自然数とする. 次は同値である.

(1) すべての $0 \le i \le n$ について, ベッチ数 $\beta_i = \dim_k \mathrm{Tor}_i^S(S/I_t, k)$ は基礎体 $R = k$ の標数によらない.

(1)′ すべての $0 \le i \le n$ とすべての $j \in \mathbb{Z}$ について, 次数付ベッチ数 $\beta_{ij} = \dim_k \mathrm{Tor}_i^S(S/I_t, k)_j$ は基礎体 $R = k$ の標数によらない.

(2) 次数付き S 加群の完全列

$$F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to F_1 \to S \to S/I_t \to 0$$

で各 F_i は有限生成自由で極小 $(\partial_i \otimes R = 0)$ なものが $R = \mathbb{Z}$ 上で存在する.

極小自由分解の存在

命題 10 (P. Roberts)

n は自然数とする．次は同値である．

(1) すべての $0 \le i \le n$ について，ベッチ数 $\beta_i = \dim_k \operatorname{Tor}_i^S(S/I_t, k)$ は基礎体 $R = k$ の標数によらない．

(1)′ すべての $0 \le i \le n$ とすべての $j \in \mathbb{Z}$ について，次数付ベッチ数 $\beta_{ij} = \dim_k \operatorname{Tor}_i^S(S/I_t, k)_j$ は基礎体 $R = k$ の標数によらない．

(2) 次数付き S 加群の完全列

$$F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to F_1 \to S \to S/I_t \to 0$$

で各 F_i は有限生成自由で極小 $(\partial_i \otimes R = 0)$ なものが $R = \mathbb{Z}$ 上で存在する．

極小自由分解の存在

命題 10 (P. Roberts)

n は自然数とする. 次は同値である.

(1) すべての $0 \le i \le n$ について, ベッチ数 $\beta_i = \dim_k \operatorname{Tor}_i^S(S/I_t, k)$ は基礎体 $R = k$ の標数によらない.

(1)′ すべての $0 \le i \le n$ とすべての $j \in \mathbb{Z}$ について, 次数付ベッチ数 $\beta_{ij} = \dim_k \operatorname{Tor}_i^S(S/I_t, k)_j$ は基礎体 $R = k$ の標数によらない.

(2) 次数付き S 加群の完全列

$$F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to F_1 \to S \to S/I_t \to 0$$

で各 F_i は有限生成自由で極小 $(\partial_i \otimes R = 0)$ なものが $R = \mathbb{Z}$ 上で存在する.

極小自由分解の存在

命題 10 (P. Roberts)

n は自然数とする．次は同値である．

(1) すべての $0 \le i \le n$ について，ベッチ数 $\beta_i = \dim_k \mathrm{Tor}_i^S(S/I_t, k)$ は基礎体 $R = k$ の標数によらない．

(1)′ すべての $0 \le i \le n$ とすべての $j \in \mathbb{Z}$ について，次数付ベッチ数 $\beta_{ij} = \dim_k \mathrm{Tor}_i^S(S/I_t, k)_j$ は基礎体 $R = k$ の標数によらない．

(2) 次数付き S 加群の完全列

$$F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to F_1 \to S \to S/I_t \to 0$$

で各 F_i は有限生成自由で極小 $(\partial_i \otimes R = 0)$ なものが $R = \mathbb{Z}$ 上で存在する．

藏野氏の貢献

命題 10 の条件は $n=1$ では正しい (I_t の生成元の個数は標数と無関係で $\binom{m}{t}\cdot\binom{n}{t}$). しかし, 1985 年当時, $n=2$ になると命題 10 は Sharpe による cojecture だった ($t=2$ では Sharpe が肯定的に解決). 藏野氏はこの問題に取り組んで肯定的に解決した. よりくわしく, I_t の第一シジジ Ω の生成元を具体的に決定することによって $\beta_{2,j}=0$ ($j\neq t+1$) を示した ($\beta_{2,t+1}$ は標数によらない).

行列式の記号

$$0 \to \Omega \to F_1 = S \otimes \bigwedge^t V \otimes \bigwedge^t W \xrightarrow{\partial_1} I_t \to 0$$

が完全. F_1 の元 $a \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t} \otimes f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_t}$ は

$$a\langle i_1, \dots, i_t; j_1, \dots, j_t\rangle$$

と書くことにする.

$$\partial_1(\langle i_1, \dots, i_t; j_1, \dots, j_t\rangle) = \det(x_{i_u j_v})_{1 \le u,v \le t}$$

は

$$[i_1, \dots, t_t; j_1 \dots, j_t]$$

と書く.

生成元の候補 (type I)

$1 \leq i_1 < \cdots < i_{t+1} \leq m$ および $1 \leq j_1 < \cdots < j_t \leq n$ で $1 \leq a \leq t+1$ のとき

$$\sum_{u=1}^{t+1} (-1)^{u+1} x_{i_u j_a} \langle i_1, \ldots, \widehat{i_u}, \ldots, i_{t+1}; j_1, \ldots, j_t \rangle \in \Omega_{t+1}$$

またこれの行と列の立場を入れ替えたもの.

生成元の候補 (type II)

$1 \le i_1 < \cdots < i_{t+1} \le m$, $1 \le j_1 < \cdots < j_{t+1} \le n$, $1 \le a, b \le t+1$ について

$$\sum_{u=1}^{t+1} (-1)^{u+1} x_{i_u j_a} \langle i_1, \ldots, \widehat{i_u}, \ldots, i_{t+1}; j_1, \ldots, \widehat{j_a}, \ldots, j_{t+1} \rangle$$
$$- \sum_{v=1}^{t+1} (-1)^{v+1} x_{i_b j_v} \langle i_1, \ldots, \widehat{i_b}, \ldots, i_{t+1}; j_1, \ldots, \widehat{j_v}, \ldots, j_{t+1} \rangle \in \Omega_{t+1}.$$

藏野の定理

定理 11 (藏野和彦)

I_t の第一シジジ Ω は type I, type II の元で S 加群として生成される．特に Ω は Ω_{t+1} で生成される．β_{2j} $(j \in \mathbb{Z})$ および β_2 は体の標数によらない．

Proof.

Cauchy's formula を用いる (大変). □

藏野の定理

定理 11 (藏野和彦)

I_t の第一シジジ Ω は type I, type II の元で S 加群として生成される．特に Ω は Ω_{t+1} で生成される．β_{2j} $(j \in \mathbb{Z})$ および β_2 は体の標数によらない．

Proof.

Cauchy's formula を用いる (大変). □

その後

(1) 第 2 シジジ以降を調べるために藏野と橋本は Schur module の登場する Cauchy's formula を Schur complex の登場する複体版に一般化した．これを用いて $m = n = t + 2$ ($\mathrm{pd}_S S/I_t = 9$) の場合にすべての i について β_i が標数によらないことを示してこの場合極小自由分解が存在することを示した (後に極小自由分解の構成を Choi–Kim–Ko–Won が行っている).

(2) このころに MSRI マイクロプログラム (1987 年). Macaulay 製作者に $m = n = 5$, $t = 2$, 標数 3 の場合の β_3 の計算を依頼するも，当時のパソコンでは計算できず．

(3) その後橋本は標数 3 で β_3 が増えることを示して，S/I_t の極小自由分解が $R = \mathbb{Z}$ 上で存在する必要十分条件は $t = 1$ または $t \geq \min(m, n) - 2$ であることを示した．

その後

(1) 第 2 シジジ以降を調べるために藏野と橋本は Schur module の登場する Cauchy's formula を Schur complex の登場する複体版に一般化した．これを用いて $m = n = t + 2$ ($\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 9$) の場合にすべての i について β_i が標数によらないことを示してこの場合極小自由分解が存在することを示した (後に極小自由分解の構成を Choi–Kim–Ko–Won が行っている).

(2) このころに MSRI マイクロプログラム (1987 年). `Macaulay` 製作者に $m = n = 5$, $t = 2$, 標数 3 の場合の β_3 の計算を依頼するも，当時のパソコンでは計算できず.

(3) その後橋本は標数 3 で β_3 が増えることを示して，S/I_t の極小自由分解が $R = \mathbb{Z}$ 上で存在する必要十分条件は $t = 1$ または $t \geq \min(m, n) - 2$ であることを示した.

その後

(1) 第2シジジ以降を調べるために藏野と橋本は Schur module の登場する Cauchy's formula を Schur complex の登場する複体版に一般化した．これを用いて $m = n = t + 2$ ($\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 9$) の場合にすべての i について β_i が標数によらないことを示してこの場合極小自由分解が存在することを示した (後に極小自由分解の構成を Choi–Kim–Ko–Won が行っている).

(2) このころに MSRI マイクロプログラム (1987年). `Macaulay` 製作者に $m = n = 5$, $t = 2$, 標数 3 の場合の β_3 の計算を依頼するも, 当時のパソコンでは計算できず.

(3) その後橋本は標数 3 で β_3 が増えることを示して, S/I_t の極小自由分解が $R = \mathbb{Z}$ 上で存在する必要十分条件は $t = 1$ または $t \geq \min(m, n) - 2$ であることを示した.

対称行列の行列式イデアル

2 次の対称べキ S_2W は $y_{ij} := f_i f_j$ を基底に持つ．行列 (y_{ij}) は $S = S(S_2W) = R[y_{ij}]$ 係数の n 次正方行列．これは対称行列で，y_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$ は代数的独立．$Y = (y_{ij})$ を生成的対称行列という．今度は $I_t = I_t(Y)$ について同様の問題を考える．

Cohen–Macaulay 性と Gorenstein 性

定理 12 (kutz)

I_t は perfect of codimension $(n-t+2)(n-t+1)/2$. R が体の時 S/I_t は Cohen–Macaulay (実は strongly F-regular (type) になる (宮崎充弘)).

定理 13 (後藤)

R は体とする. I_t が Gorenstein である条件は $t=1$ または $n-t$ が偶数. S/I_t は normal domain で class group は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cohen–Macaulay 性と Gorenstein 性

定理 12 (kutz)

I_t は perfect of codimension $(n-t+2)(n-t+1)/2$. R が体の時 S/I_t は Cohen–Macaulay (実は strongly F-regular (type) になる (宮崎充弘)).

定理 13 (後藤)

R は体とする. I_t が Gorenstein である条件は $t=1$ または $n-t$ が偶数. S/I_t は normal domain で class group は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

歴史

(1) $t = 1$ の場合はやはり変数 y_{ij} の Koszul 複体が S/I_t の極小自由分解を与える．

(2) $t = n$ のとき，I_t は $\det Y$ で生成される単項イデアルで，

$$0 \to S(-n) \xrightarrow{\det Y} S \to S/I_t \to 0$$

が極小自由分解．

(3) $n - t = 1$ の場合．$\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 3$ である．後藤–橋は $1/2 \in R$ の場合に極小自由分解を構成．Józefiak が一般の場合に構成．

歴史

(1) $t = 1$ の場合はやはり変数 y_{ij} の Koszul 複体が S/I_t の極小自由分解を与える．

(2) $t = n$ のとき, I_t は $\det Y$ で生成される単項イデアルで,

$$0 \to S(-n) \xrightarrow{\det Y} S \to S/I_t \to 0$$

が極小自由分解．

(3) $n - t = 1$ の場合．$\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 3$ である．後藤–橋は $1/2 \in R$ の場合に極小自由分解を構成．Józefiak が一般の場合に構成．

歴史

(1) $t = 1$ の場合はやはり変数 y_{ij} の Koszul 複体が S/I_t の極小自由分解を与える.

(2) $t = n$ のとき, I_t は $\det Y$ で生成される単項イデアルで,

$$0 \to S(-n) \xrightarrow{\det Y} S \to S/I_t \to 0$$

が極小自由分解.

(3) $n - t = 1$ の場合. $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 3$ である. 後藤–橘は $1/2 \in R$ の場合に極小自由分解を構成. Józefiak が一般の場合に構成.

藏野氏の貢献

$q : S(W \otimes W) \to S(S_2 W)$ を $x_{ij} = f_i \otimes f_j$ を $y_{ij} = f_i f_j$ に写す準同型とする．$r \geq 0$ と $\lambda \in \Omega_r$ について，$q(\mathcal{M}_\lambda)$ を $\mathcal{N}_\lambda$ で表す．$(\mathcal{N}_\lambda)$ は $S_r(S_2 W)$ のフィルトレーション．

定理 14 (Plethysm formula, Boffi, 藏野)

$\mathcal{N}_\lambda / \dot{\mathcal{N}}_\lambda \cong L_{\widetilde{2\tilde{\lambda}}} W$．ここに

$$\widetilde{2\tilde{\lambda}} = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots).$$

従って $S_r(S_2 W)$ は up to filtration で

$$\bigoplus_{\lambda \in \Omega_r} L_{\widetilde{2\tilde{\lambda}}} W.$$

I_t の極小な生成元

特に I_t の生成系 $I_{t,t}$ は Schur module $L_{t,t}W$ と同型である．Schur module の基底は standard basis theorem によって与えられており，I_t の極小生成元として

$$q([a_1, \dots, a_t; b_1, \dots, b_t]) \qquad (1 \le a_1 < \cdots < a_t \le n, \\ 1 \le b_1 < \cdots < b_t \le n,\ a_i \le b_i \quad (1 \le i \le t))$$

がとれることが分かる．また，Giambeli の公式から，

$$\beta_1(S/I_t) = \mu(I_t) = \binom{n}{t}^2 - \binom{n}{t+1}\binom{n}{t-1}.$$

対称行列の第一シジジ定理

定理 15 (藏野和彦)

(1) S/I_t の第一シジジは type I, type II の関係式から来る関係式で生成される.

(2) 特に $\beta_{2j} = 0$ $(j \neq t+1)$.

(3) $n - t = 2$ のとき, β_i はすべての i について標数によらず, 従って S/I_t は $\mathbb{Z}$ 上極小自由分解を持つ.

対称行列の第一シジジ定理

定理 15 (藏野和彦)

(1) S/I_t の第一シジジは type I, type II の関係式から来る関係式で生成される.

(2) 特に $\beta_{2j} = 0$ $(j \neq t+1)$.

(3) $n - t = 2$ のとき, β_i はすべての i についてて標数によらず, 従って S/I_t は $\mathbb{Z}$ 上極小自由分解を持つ.

対称行列の第一シジジ定理

定理 15 (藏野和彦)

(1) S/I_t の第一シジジは type I, type II の関係式から来る関係式で生成される.

(2) 特に $\beta_{2j} = 0$ $(j \neq t+1)$.

(3) $n - t = 2$ のとき, β_i はすべての i について標数によらず, 従って S/I_t は $\mathbb{Z}$ 上極小自由分解を持つ.

その後の否定的な結果

その後次の否定的な結果が得られ, S/I_t の ($\mathbb{Z}$ 上の) 極小自由分解も一般には存在しないことが分かった.

(1) Andersen は $n \geq 7$, $t = 2$ の場合に, S/I_t が 2 次のベロネーゼ部分環で特に normal semigroup ring であることを用いて, ある種の simplicial complex の singular homology を計算して β_5 が標数によることを示した.

(2) 橋本は plethysm formula を複体バージョンに一般化して, それを用いて (1) のあとに $n \geq 11$, $t = 3$ で β_3 が標数 3 で上昇することを示した.

その後の否定的な結果

その後次の否定的な結果が得られ, S/I_t の ($\mathbb{Z}$ 上の) 極小自由分解も一般には存在しないことが分かった.

(1) Andersen は $n \geq 7$, $t = 2$ の場合に, S/I_t が 2 次のベロネーゼ部分環で特に normal semigroup ring であることを用いて, ある種の simplicial complex の singular homology を計算して β_5 が標数によることを示した.

(2) 橋本は plethysm formula を複体バージョンに一般化して, それを用いて (1) のあとに $n \geq 11$, $t = 3$ で β_3 が標数 3 で上昇することを示した.

その後の否定的な結果

その後次の否定的な結果が得られ, S/I_t の ($\mathbb{Z}$ 上の) 極小自由分解も一般には存在しないことが分かった.

(1) Andersen は $n \geq 7$, $t = 2$ の場合に, S/I_t が 2 次のベロネーゼ部分環で特に normal semigroup ring であることを用いて, ある種の simplicial complex の singular homology を計算して β_5 が標数によることを示した.

(2) 橋本は plethysm formula を複体バージョンに一般化して, それを用いて (1) のあとに $n \geq 11$, $t = 3$ で β_3 が標数 3 で上昇することを示した.

交代行列の定義

B が可換環, $A = (a_{ij}) \in M_n(B)$ とする. A が交代行列であるとは, $a_{ij} = -a_{ji}$ $(1 \leq i, j \leq n)$, $a_{ii} = 0$ $1 \leq i \leq n$ が成立することをいう.

注意 16

第二の条件は $1/2 \in B$ なら第一の条件から出る.

交代行列の定義

B が可換環, $A = (a_{ij}) \in M_n(B)$ とする. A が交代行列であるとは, $a_{ij} = -a_{ji}$ $(1 \leq i, j \leq n)$, $a_{ii} = 0$ $1 \leq i \leq n$ が成立することをいう.

注意 16

第二の条件は $1/2 \in B$ なら第一の条件から出る.

パフィアン

B が可換環, $A = (a_{ij}) \in M_{2n}(B)$ とする.

$$\mathrm{Pfaff}(A) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n},\ \sigma 1 < \sigma 3 < \cdots < \sigma(2n-1) \\ \sigma(2i-1) < \sigma(2i)\ (\forall i)}} (-1)^{\sigma} a_{\sigma 1\, \sigma 2} a_{\sigma 3\, \sigma 4} \cdots a_{\sigma(2n-1) \sigma(2n)}$$

と定義し, $\mathrm{Pfaff}(A)$ を A のパフィアンという.

$$\mathrm{Pfaff}(A)^2 = \det(A)$$

が知られている. 一方, 奇数次の交代行列は行列式が 0 である.

パフィアン

B が可換環, $A = (a_{ij}) \in M_{2n}(B)$ とする.

$$\mathrm{Pfaff}(A) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n},\ \sigma 1 < \sigma 3 < \cdots < \sigma(2n-1) \\ \sigma(2i-1) < \sigma(2i)\ (\forall i)}} (-1)^{\sigma} a_{\sigma 1\, \sigma 2} a_{\sigma 3\, \sigma 4} \cdots a_{\sigma(2n-1) \sigma(2n)}$$

と定義し, $\mathrm{Pfaff}(A)$ を A のパフィアンという.

$$\mathrm{Pfaff}(A)^2 = \det(A)$$

が知られている. 一方, 奇数次の交代行列は行列式が 0 である.

パフィアンイデアル

R は可換環, $W = R^n$, $z_{ij} = f_i \wedge f_j \in \bigwedge^2 W$ とおく. $S = S(\bigwedge^2 W)$ とおく. S 係数の交代行列 $Z = (z_{ij})$ について, すべての $2t$ 次の主小行列 (行と列とを同じ番号で選んだ小行列, 再び交代行列になる) のパフィアンで生成される S のイデアルを $Pf_{2t}(Z) = Pf_{2t}$ で表し, (generic な) パフィアンイデアルと呼ぶ.

定理 17 (Kleppe–Laksov 他)

R は体とする. S/Pf_{2t} は Gorenstein F-regular (type) で, UFD.
Pf_{2t} は height $(n-2t+1)(n-2t+2)/2$.

パフィアンイデアル

R は可換環, $W = R^n$, $z_{ij} = f_i \wedge f_j \in \bigwedge^2 W$ とおく. $S = S(\bigwedge^2 W)$ とおく. S 係数の交代行列 $Z = (z_{ij})$ について, すべての $2t$ 次の主小行列 (行と列とを同じ番号で選んだ小行列, 再び交代行列になる) のパフィアンで生成される S のイデアルを $Pf_{2t}(Z) = Pf_{2t}$ で表し, (generic な) パフィアンイデアルと呼ぶ.

定理 17 (Kleppe–Laksov 他)

R は体とする. S/Pf_{2t} は Gorenstein F-regular (type) で, UFD.
Pf_{2t} は height $(n-2t+1)(n-2t+2)/2$.

歴史

(1) $t = 1$ のとき, $Pf_{2t} = (z_{ij})$ であり, Koszul complex が極小自由分解.

(2) $n = 2t$ の場合は単項イデアルでありつまらない.

(3) $2t = n - 1$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 3$. Buchsbaum–Eisenbud は codimension 3 の Gorenstein ideal はパフィアンイデアルであることを示すとともに, この場合の極小自由分解を具体的に示している.

(4) $2t = n - 2$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 6$. Pragacz はこの場合の極小自由分解を構成した.

歴史

(1) $t = 1$ のとき, $Pf_{2t} = (z_{ij})$ であり, Koszul complex が極小自由分解.

(2) $n = 2t$ の場合は単項イデアルでありつまらない.

(3) $2t = n - 1$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 3$. Buchsbaum–Eisenbud は codimension 3 の Gorenstein ideal はパフィアンイデアルであることを示すとともに, この場合の極小自由分解を具体的に示している.

(4) $2t = n - 2$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 6$. Pragacz はこの場合の極小自由分解を構成した.

歴史

(1) $t=1$ のとき, $Pf_{2t}=(z_{ij})$ であり, Koszul complex が極小自由分解.

(2) $n=2t$ の場合は単項イデアルでありつまらない.

(3) $2t=n-1$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t=3$. Buchsbaum–Eisenbud は codimension 3 の Gorenstein ideal はパフィアンイデアルであることを示すとともに, この場合の極小自由分解を具体的に示している.

(4) $2t=n-2$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t=6$. Pragacz はこの場合の極小自由分解を構成した.

歴史

(1) $t = 1$ のとき, $Pf_{2t} = (z_{ij})$ であり, Koszul complex が極小自由分解.

(2) $n = 2t$ の場合は単項イデアルでありつまらない.

(3) $2t = n - 1$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 3$. Buchsbaum–Eisenbud は codimension 3 の Gorenstein ideal はパフィアンイデアルであることを示すとともに, この場合の極小自由分解を具体的に示している.

(4) $2t = n - 2$ のとき, $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = 6$. Pragacz はこの場合の極小自由分解を構成した.

藏野氏登場

藏野氏は Boffi と独立に $S(\bigwedge^2 W)$ の plethysm formula を示し，それを利用して次を示した.

定理 18

R は標数 p の体とする (但し標数 0 では $p=\infty$ とする).

(1) $2p > n-2t$ ならば，$\beta_{2j}=0$ ($j \neq t+1$).

(2) $p=2$, $n=8$, $t=2$ のとき，$\beta_{2,4} \neq 0$ (標数 0 と異なる).

(3) 従って $n=8$, $t=2$ のとき，S/Pf_{2t} は $\mathbb{Z}$ 上極小自由分解を持たない.

藏野氏登場

藏野氏は Boffi と独立に $S(\bigwedge^2 W)$ の plethysm formula を示し，それを利用して次を示した.

定理 18

R は標数 p の体とする (但し標数 0 では $p = \infty$ とする).

(1) $2p > n - 2t$ ならば, $\beta_{2j} = 0$ $(j \neq t+1)$.

(2) $p = 2$, $n = 8$, $t = 2$ のとき, $\beta_{2,4} \neq 0$ (標数 0 と異なる).

(3) 従って $n = 8$, $t = 2$ のとき, S/Pf_{2t} は $\mathbb{Z}$ 上極小自由分解を持たない.

藏野氏登場

藏野氏は Boffi と独立に $S(\bigwedge^2 W)$ の plethysm formula を示し，それを利用して次を示した.

定理 18

R は標数 p の体とする (但し標数 0 では $p=\infty$ とする).

(1) $2p > n-2t$ ならば, $\beta_{2j}=0$ ($j \neq t+1$).

(2) $p=2$, $n=8$, $t=2$ のとき, $\beta_{2,4} \neq 0$ (標数 0 と異なる).

(3) 従って $n=8$, $t=2$ のとき, S/Pf_{2t} は $\mathbb{Z}$ 上極小自由分解を持たない.

藏野氏登場

藏野氏は Boffi と独立に $S(\bigwedge^2 W)$ の plethysm formula を示し，それを利用して次を示した.

定理 18

R は標数 p の体とする (但し標数 0 では $p = \infty$ とする).

(1) $2p > n - 2t$ ならば，$\beta_{2j} = 0$ ($j \neq t+1$).

(2) $p = 2$, $n = 8$, $t = 2$ のとき，$\beta_{2,4} \neq 0$ (標数 0 と異なる).

(3) 従って $n = 8$, $t = 2$ のとき，S/Pf_{2t} は $\mathbb{Z}$ 上極小自由分解を持たない.

藏野氏登場

藏野氏は Boffi と独立に $S(\bigwedge^2 W)$ の plethysm formula を示し，それを利用して次を示した.

定理 18

R は標数 p の体とする (但し標数 0 では $p = \infty$ とする).

(1) $2p > n - 2t$ ならば, $\beta_{2j} = 0$ $(j \neq t+1)$.

(2) $p = 2$, $n = 8$, $t = 2$ のとき, $\beta_{2,4} \neq 0$ (標数 0 と異なる).

(3) 従って $n = 8$, $t = 2$ のとき, S/Pf_{2t} は $\mathbb{Z}$ 上極小自由分解を持たない.

後追い

Plethysm formula を複体に一般化して利用することにより，橋本は次を得た．

定理 19

R は標数 p の体とする．このとき，

$$\beta_{2j} = \begin{cases} n\binom{n}{2t+1} - \binom{n}{2t+2} & (j = t+1) \\ \binom{n}{j} & (p = 2 \text{ かつ } t+2 \le j \le 2t \\ & \text{ かつ } j - t \text{ は } 2 \text{ べキ}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}.$$

後追い

Plethysm formula を複体に一般化して利用することにより，橋本は次を得た．

定理 19

R は標数 p の体とする．このとき，

$$\beta_{2j} = \begin{cases} n\binom{n}{2t+1} - \binom{n}{2t+2} & (j = t+1) \\ \binom{n}{j} & (p = 2 \text{ かつ } t+2 \le j \le 2t \\ & \text{ かつ } j-t \text{ は } 2 \text{ べキ}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}.$$