Math. J. Okayama Univ. **21** (1979), 91—113

SYMMETRISCHE FUNKTIONEN. INVARIANTEN VON LINEAREN GRUPPEN ENDLICHER ORDNUNG*)

RICHARD BRAUER IN TORONTO

Inhaltsübersicht

A. Symmetrische Funktionen

B. Invarianten von linearen Gruppen endlicher Ordnung

C. Das Kleinsche Formenproblem

A. Symmetrische Funktionen

1. Definitionen. Eine rationale Fnnktion $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ von n Unbestimmeten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ mit Koeffizienten aus einem gegebenen Körper P heißt *symmetrisch*, wenn sie bei jeder Permutation von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ungeändert bleibt. Jede derartige Funktion kann als Quotient zweier ganzer symmetrischer Funktionen dargestellt werden, so daß man sich auf die Betrachtung symmetrischer Polynome $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ beschränken kann.

*) This posthumous article, one of two articles commisioned by B. G. Teubner of Leipzig for the Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (I B 12), was completed in 1936. The political development in Germany then prevented its publication.

Es seien $m_1, m_2, \cdots, m_p$ positive ganze Zahlen. Summiert man alle verschiedenen aus $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_p^{m_p}$ durch Permutation der x_ν ($\nu = 1, \cdots, n$) entstehenden Glieder, so entsteht eine symmetrische Funktion $s_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$, eine sogenannte *r-förmige monogene* Funktion. Jedes symmetrische Polynom G ist eine lineare Verbindung derartiger monogener Funktionen.

Von besonderer Wichtigkeit sind die *elementarsymmetrischen Funktionen*

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
c_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s_1,\\
c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = s_{1,1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_n &= x_1x_2 \cdots x_n = s_{1,1,\cdots,1};
\end{aligned}
$$

es sind n algebraisch unabhängige Funktionen der x_ν. Sie können auch durch die Gleichung

$$
(2)\qquad f(t) = (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n) = t^n - c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n c_n
$$

definiert werden, in der t eine Unbestimmte bedeutet. Wichtig sind ferner die einförmigen Funktionen oder *Potenzsummen*

$$
(3)\qquad s_m = x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m .
$$

2. **Der Hauptsatz**[1]. *Jedes symmetrische Polynom $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ kann als Polynom $H(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ der elementarsymmetrischen Funktionen dargestellt werden. Diese Darstellung ist eindeutig. Die Koeffizienten von H sind durch Additionen und Subtraktionen aus denen von G zusammengesetzt.*

Beweis[2]. Ein Potenzprodukt $a x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ mit konstantem a gelte als höher als $b x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$, wenn die erste nichtverschwindende Differenz $m_1 - r_1, m_2 - r_2, \cdots, m_n - r_n$ positiv ist. In dem höchsten in G auftretenden Glied $X = a x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ ist $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n$. Die Funktion

$$
G_1 = G - a c_1^{m_1 - m_2} c_2^{m_2 - m_3} \cdots c_{n-1}^{m_{n-1} - m_n} c_n^{m_n}
$$

ist symmetrisch, ihr höchstes Glied ist niedriger als X. Man verfahre mit G_1 ebenso wie vorher mit G u. s. w. Nach endlich vielen Schritten

1) *E. Waring*, Miscellanea analytica, Cambridge 1762; Meditationes algebraicae, Cambridge 1782; *F. Gauß*, Demonstratio nova altera ⋯ (1816), Werke **3**, 36.

2) Außer dem hier gegebenen Waring-Gaußschen Beweis sei hier noch der Cauchysche Beweis erwähnt: *A. L. Cauchy*, Exercices de mathématiques 4, S. 103, Paris 1829 = Oeuvres Complètes (2), 9, 132; vgl. auch *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra 2. Aufl. Bd. 1, S. 160, Braunschweig 1898.

bricht das Verfahren ab.

Ist $\varphi(t) = t_1^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ eine Gleichung mit Koeffizienten aus P, die in einem Erweiterungskörper die Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ besitzt, so ist a_ν der Wert von $(-1)^\nu c_\nu$ für $x_1 = \xi_1, \cdots, x_n = \xi_n$. Daher kann für jede symmetrische Funktion G der Wert $G(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ allein aus den a_ν berechnet werden, ohne daß die ξ_ν selbst bekannt zu sein brauchen. Ist z. B. $h(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus P, so sind die Koeffizienten b_ν in

$$(t - h(\xi_1))\,(t - h\,(\xi_2)) \cdots (t - h\,(\xi_n)) = t^n + b_1 t^{n-1} + \cdots + b_n$$

ganz rational aus den a_ν zu berechnen (*Tschirnhaustransformation* von $\varphi(t) = 0$[3]).

Gehören die Koeffizienten von $\varphi(t)$ und von $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ einem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ in P an, so gehört auch $G(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ zu $\mathfrak{J}$.

Zur Berechnung der Darstellung einer symmetrischen Funktion $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ durch die c_ν ist es häufig zweckmäßig, $H(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen. Durch Spezialisierung der Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_n$ erhält man lineare Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten. Dabei sind die folgenden Bemerkungen wichtig:

I. Hat G den Grad k in bezug auf x_1, so ist H vom Grad k in $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

II. Ist G homogen vom Grad N in $x_1, x_2, \cdots, x_n$, so ist H isobar vom Gewicht N, d. h. H enthält nur Glieder $a c_1^{\kappa_1} c_2^{\kappa_2} \cdots c_n^{\kappa_n}$ (a konstant) mit

$$\kappa_1 + 2\kappa_2 + \cdots + n\kappa_n = N\text{[4]}.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten von H kann man sich auch gewisser von *Brioschi* und *Netto*[5] angegebener partieller Differentialgleichungen bedienen, denen die symmetrischen Funktionen genügen.

Mit der Auffindung der Darstellung einer symmetrischen Funktion G durch die c_ν beschäftigt sich eine große Zahl von Arbeiten[6]; bis zum

---

3) Einen Bericht über Tschirnhausentransformationen mit zahlreichen Literaturangaben findet man bei *R. Garver*, Ann. Math. (2) **29**, 319, 1928.

4) Eine Verallgemeinerung hat *G. Kohn* (S. B. Akad. Wiss. Wien **102**, 199, 1893) gegeben.

5) *F. Brioschi*, Ann. Mat. Fis. **5**, 422, 1854 = Opere Matematiche **1**, 143; *E. Netto*, Z. Math. Phys. **38**, 457, 1893; **40**, 375, 1895.

6) Außerdem in Nr. **4**—**6** genannten Arbeiten sei hier noch *G. Kostka*, Leop. Nova Acta **104**, 217, 1919 erwähnt; vgl. ferner die bei *Decker*[7] zitierten Arbeiten.

Grad 15 gibt es Tabellen[7]. Auf eine Symmetrieeigenschaft derartiger Tabellen hat *Cayley*[8] hingewiesen; eine Verallgemeinerung stammt von *Mac Mahon*[9].

3. Potenzsummen. Die Darstellung der Potenzsummen durch die c_ν erhält man aus den *Newtonschen Relationen*

$$(4)\qquad s_m - c_1 s_{m-1} + c_2 s_{m-2} - \cdots + (-1)^{m-1} c_{m-1} s_1 + (-1)^m m c_m = 0,$$

wo $c_k = 0$ für $k > n$ zu setzen ist. Durch Auflösung erhält man eine Determinantendarstellung der s_m. Die explizite Formel lautet[10]

$$(5)\quad s_m = m \sum_{\mu_1+2\mu_2+\cdots+n\mu_n=m} (-1)^{\mu_2+\mu_4+\mu_6+\cdots} \frac{(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n-1)!}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_n!} c_1^{\mu_1} c_2^{\mu_2} \cdots c_n^{\mu_n}.$$

Umgekehrt gilt[10]

$$(6)\qquad c_m = \sum_{\mu_1+2\mu_2+\cdots+m\mu_m=m} \frac{(-1)^{\mu_2+\mu_4+\mu_6+\cdots}}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_m!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\mu_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\mu_2} \cdots \left(\frac{s_m}{m}\right)^{\mu_m},$$

wobei der Fall auszuschließen ist, daß die Charakteristik $\chi(P)$ von P (vgl. 10 (*Baer*), Nr. 5) eine in $m!$ aufgehende Primzahl ist. Ist $n!$ nicht durch $\chi(P)$ teilbar, so kann man jedes symmetrische $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ganz rational durch $s_1, s_2, \cdots, s_n$ ausdrücken.

Sind $k_1, k_2, \cdots, k_n$ verschiedene natürliche Zahlen derart daß das Komplement von $k_1, k_2, \cdots, k_n$ in der Menge der natürlichen Zahlen mit b und c auch stets $b+c$ enthält, so kann man jede symmetrische Funktion rational durch $s_{k_1}, s_{k_2}, \cdots s_{k_n}$ ausdrücken[11].

4. Darstellung mehrförmiger Funktionen durch Potenzsummen. Ist $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n \geqq 0$, so setzen wir

$$S(m_1, m_2, \cdots, m_n) = \sum x_{\nu_1}^{m_1} x_{\nu_2}^{m_2} \cdots x_{\nu_n}^{m_n},$$

7) *Faà di Bruno*, Einleitung in die Theorie der binären Formen, Leipzig 1881, S. 311 (zahlreiche Druckfehler); *W. Řehořovský*, Wien. Denkschr. **46**, 51, 1882; *W. P. Durfee*, Amer. J. Math. **5**, 45, 1882; **9**, 278, 1887; *P. A. Mac Mahon*, Amer. J. Math. **6**, 289, 1884; *F. F. Decker*, Carnegie Institution, Washington 1910.

8) Philos. Trans. R. Soc. London **147**, 489, 1857 = Collected Mathematical Papers **2**, 417.

9) Vgl. Combinatory Analysis Bd. 1, Cambridge 1915.

10) S. *Waring*[1].

11) S. *Kakeya*, Japan. J. Math. **2**, 69, 1925; **4**, 77, 1927; *T. Nakamura*, ebenda **4**, 87, 1927; Spezialfälle waren vorher gegeben worden von: *C. W. Borchardt*, Berliner Monatsber. 1857, 301 = Werke S. 112; *Th. Vahlen*, Acta Math. **23**, 91, 1899; *B. von Ludwig*, Math. Ann. **83**, 67, 1921.

wo die Summe über alle Permutationen $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ von $1, 2, \cdots, n$ zu erstrecken ist. Dann unterscheiden sich $s_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ (Nr. **1**) und $S(m_1, \cdots, m_n)$ nur um einen ganzzahligen Faktor. Man beweist leicht

$$S(m_1, m_2, \cdots, m_n)s_a = S(m_1+a, m_2, \cdots, m_n) + S(m_1, m_2+a, m_3, \cdots, m_n) + \cdots + S(m_1, \cdots, m_{n-1}, m_n+a),$$

wobei s_a eine einförmige monogene Funktion ist. Ist die Charakteristik $\chi(P)$ kein Teiler von $(n-1)!$, so folgt hieraus für $m_{r+1} = \cdots = m_n = 0$ leicht, daß man alle $(r+1)$-förmigen Funktionen durch r-förmige und Potenzsummen ausdrücken kann. Durch wiederholte Anwendung erhält man eine Darstellung der symmetrischen Funktionen durch die Potenzsummen S_m[10]. Ist $\chi(P) = 0$, so liefert (5) einen Beweis des Hauptsatzes (Nr. 2).

Ist $m_r \neq 0$, so erhält man $\frac{1}{(n-r)!} S(m_1, m_2, \cdots, m_r, 0, \cdots, 0)$ aus der Determinante r-ten Grades $|a_{\kappa\lambda}|$, $(\kappa, \lambda = 1, 2, \cdots, r)$, wenn nach Entwicklung in jedem Glied das Produkt $a_{\rho_1\rho_2}a_{\rho_2\rho_3} \cdots a_{\rho_{l-1}\rho_l}a_{\rho_l\rho_1}$ durch s_M mit $M = m_{\rho_1} + m_{\rho_2} + \cdots m_{\rho_l}$, speziell $a_{\rho\rho}$ durch s_{m_ρ} ersetzt wird[12].

Kronecker[12] hat eine Methode angegeben, die Darstellung der monogenen Funktionen durch die c_ν zu finden[14].

5. Erzeugende Funktionen. Die Formeln (4) sind mit der folgenden, formalen Entwicklungsformel (vgl. (2))

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{t-x_r} \sim \frac{s_0}{t} + \frac{s_1}{t^2} + \frac{s_2}{t^3} + \cdots \tag{7}$$

äquivalent. Dar aus folgt, daß für ein Polynom $g(t)$ sich $\sum_{\nu=1}^{m} g(x_\nu)$ als Koeffizient von t^{-1} in der formalen Entwicklung von $\frac{f'(t)}{f(t)} g(t)$ ergibt[15]. *C. W. Borchardt*[16] hat in Verallgemeinerung von (7) eine rationale Funktion von r Parametern angegeben, die $s_{m_1, m_2, \cdots, m_r}$ als Entwicklungskoeffizienten

12) S. *F. Brioschi*[5].

13) Berliner Monatsber. 1880, 936 = Werke **4**, 97.

14) Eine andere Behandlung dieser Aufgabe bei *A. Dresden*, Ann. Math. (2) **24**, 227, 1923; **25**, 71, 1924.

15) *A. L. Cauchy*, Exercices de mathématiques **1**, Paris 1926 = Oeuvres Complètes (2) **6**, 401; *A. Transon*, Nouv. Ann. (1) **9**, 75, 1850.

16) Berliner Monatsber. 1855, 165 = Werke S. 97. Vgl. ferner *F. Mertens*, J. Reine Angew. Math. **75**, 264, 1872 und auch *C. G. J. Jacobi*, J. Reine Angew. Math. **22**, 360, 1841 = Werke **3**, 439.

besitzt. Man erhält so eine weitere Methode, die monogenen Funktionen durch die c_ν auszudrücken.

6. Spezielle symmetrische Funktionen. Von speziellen symmetrischen Funktionen ist bemerkenswert die Summe p_m aller Potenzprodukte $x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n}$ von der Dimension m, $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = m$. Diese häufig als Wronskische Alephfunktionen bezeichneten Ausdrücke[17] können auch durch die formale Entwicklung

$$(8) \qquad \frac{1}{f(t)} = \frac{1}{t^n - c_1 t^{n-1} + \cdots \pm c^n} = \frac{1}{t^n} + \frac{p_1}{t^{n+1}} + \frac{p_2}{t^{n+2}} + \cdots$$

nach fallenden Potenzen von t definiert werden. Aus (7) und (8) folgt

$$(9) \qquad \begin{aligned} &p_m - c_1 p_{m-1} + c_2 p_{m-2} - \cdots + (-1)^{m-1} c_{m-1} p_1 + (-1)^m c_m = 0, \\ &m p_m = s_m + p_1 s_{m-1} + \cdots + p_{m-1} s_1, \\ &s_m = c_1 p_{m-1} - 2 c_2 p_{m-2} + \cdots + (-1)^m m c_m . \end{aligned}$$

Ferner ist, analog zu (5) und (6),

$$(10) \qquad p_m = \sum_{\mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + n\mu_n = m} (-1)^{\mu_2 + \mu_4 + \mu_6 + \cdots} \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)!}{\mu_1! \, \mu_2! \cdots \mu_n!} c_1^{\mu_1} c_2^{\mu_2} \cdots c_n^{\mu_n},$$

$$(11) \qquad p_m = \sum_{\mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + m\mu_m = m} \frac{1}{\mu_1! \, \mu_2! \cdots \mu_m!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\mu_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\mu_2} \cdots \left(\frac{s_m}{m}\right)^{\mu_m} \quad \text{für } \chi(P) = 0.$$

Vielfach untersucht worden sind Determinanten der Form

$$(12) \qquad \Phi(m_1, m_2, \cdots, m_n) = |p_{m_\kappa - \kappa + 1}, p_{m_\kappa - \kappa + 2}, \cdots p_{m_\kappa - \kappa + n}|^{18)},$$

wo die n Zeilen aus der angeschriebenen erhalten werden, wenn man $\kappa = 1, 2, \cdots, n$ setzt mit $p_0 = 1$, $p_{-1} = p_{-2} = \cdots = p_{-w+1} = 0$. Setzt man in ähnlicher Schreibweise

$$D(r_1, r_2, \cdots, r_n) = | x_\kappa^{r_1}, x_\kappa^{r_2}, \cdots, x_\kappa^{r_n} |^{19)},$$

17) Vgl. etwa *H. J. M. Wronski*, Introductions à la philosophie des mathématiques, Paris 1811; *F. Brioschi*, Nouv. Ann. (1), **16**, 248, 1857; *N. Trudi*, Giorn. Mat. **2**, 152, 1864.

18) Vgl. etwa *A. L. Cauchy*, J. École Polytechn. **10**. Heft 17, 29, 1815 = Oeuvres Complètes (2) **1**, 91; *Jacobi*[16]; *H. Naegelsbach*, Über eine Klasse symmetrischer Funktionen, Zweibrücken 1872; *C. Kostka*, J. Reine Angew. Math. **81**, 281, 1876; *D. E. Littlewood* und *A. R. Richardson*, Philos. Trans. R. Soc. London A **233**, 99, 1934.

19) Zahlreiche Literaturangaben über deratige Alternanten findet man bei *Th. Muir*, The theory of determinants in the historical order of development, 4 Bände, London 1906—1923; Contributions to the history of determinants 1900—1920, London 1930.

so ist $\Phi(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ gleich dem Quotienten von $D(m_1+n-1, m_2+n-2, \cdots, m_n)$ durch die Vandermondesche Determinante $D(n-1, n-2, \cdots, 1, 0)$. Man kan Φ auch als eine aus den elementarsymmetrischen Funktionen gebildete Determinante schreiben. Ersetzt man in einer symmetrischen Funktion $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ jedes Glied $ax_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}$ durch $a\Phi(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$, so bleibt G ungeändert. Man erhält so eine Darstellung von G durch die p_m und vermöge (10) durch die c_m.

Ist $\mathfrak{L}$ die allgemeine lineare Gruppe aller nichtsingulären Matrizen A vom n-ten Grade mit Koeffizienten aus einem Körper P der Charakteristik $\chi(P)=0$, und sind $x_1, x_2, \cdots, x_n$ die charakteristischen Wurzeln von A, so ist $\Phi(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ für $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n \geqq 0$ der Charakter einer irreduziblen ganzen rationalen Darstellung $A \rightarrow T_{m_1, m_2, \cdots, m_n}(A)$ von $\mathfrak{L}$. Alle Charaktere von irreduziblen ganzen rationalen Darstellungen von $\mathfrak{L}$ werden in dieser Form erhalten[20].

Andere spezielle symmetrische Funktionen sind von *Mac Mahon*[9] behandelt worden, der eingehende Untersuchungen über die Relationen zwischen den verschiedenen symmetrischen Funktionen angestellt hat.

Für Diskriminanten und Resultanten vergl. man 12 (*Krull*).

7. Symmetrische Funktionen von mehreren Unbestimmtenreihen[21]. Man betrachte n Systeme von je k Unbestimmten

$$X_1=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_k^{(1)}),\ X_2=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_k^{(2)}),\ \cdots\cdots,\ X_n=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}).$$

Eine rationale Funktion G der $x_\kappa^{(\nu)}$ heißt symmetrisch, wenn sie bei jeder der $n!$ Permutationen von $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ungeändert bleibt. Jede rationale symmetrische Funktion kann als Quotient ganzer symmetrischer Funktionen geschrieben werden. Zu jedem Potenzprodukt Z der $x_\kappa^{(\nu)}$ gehört wieder eine *monogene* Funktion S, die Summe der verschiedenen aus Z durch Permutation der X_ν entstehenden Glieder. Enthält dabei Z Faktoren $x_\kappa^{(\nu)}$ aus r der Systeme $X_1, X_2, \cdots, X_m$, so heißt S r-förmig. Jede ganze symmetrische Funktion ist eine lineare Verbindung von monogenen Funktionen. Jede monogene Funktion kann wie in Nr. 4 ganz rational durch einförmige Funktionen ausgedrückt werden, falls die

20) *I. Schur*, Dissertation Berlin 1901; S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1927, 58. Eine rationale Darstellung m-ten Grades von $\mathfrak{L}$ liegt vor, wenn jedem A von $\mathfrak{L}$ eine Matrix $T(A)$ vom Grad m und mit rationalen Koeffizienten entspricht, derart daß $T(AB)=T(A)T(B)$ gilt, und die Koeffizienten von $T(A)$ rationale Funktionen der Koeffizienten von A sind.

21) *S. D. Poisson*, J. École Polytechn. **4**, Heft 11, 199; *L. Schläfli*, Wien Denkschr. **4**, 1, 1852; *F. Mertens*, S. B. Akad. Wiss. Wien **81**, 988, 1880.

Charakteristik von P nicht eine in $(n-1)!$ aufgehende Primzahl ist.

Es seien $t, u_1, u_2, \cdots, u_n$ Unbestimmte; man setze

$$\xi_\nu = u_1 x_1^{(\nu)} + u_2 x_2^{(\nu)} + \cdots, + u_k x_k^{(\nu)},$$
$$P = (t+\xi_1)(t+\xi_2)\cdots(t+\xi_n).$$

Die beim Ordnen von P nach Potenzen von $t, u_1, \cdots, u_n$ auftretenden Koeffizienten $C_1, C_2, \cdots, C_N$ heißen die elementarsymmetrischen Funktionen der X_ν. Man drücke die Potenzsummen s_m von $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ durch die elementarsymmetrischen Funktionen der ξ_ν aus und vergleiche die Koeffizienten der Potenzprodukte in $u_1, u_2, \cdots, u_n$. Als Koeffizienten in $s_1, s_2, \cdots$ findet man alle einförmigen monogenen Funktionen S der X. Bei Beschränkung auf Körper der Charakteristik 0 folgt so: *Jedes S und daher jede ganze symmetrische Funktion G der X_ν kann ganz rational durch die elementarsymmetrischen Funktionen dargestellt werden.* Diese Darstellung ist für $k>1$ i. a. nicht eindeutig[22]. Bei der Darstellung können rationale Zahlen als Nenner auftreten, auch wenn G ganzzahlige Koeffizienten hat.

Wir betrachten ein algebraisches Gleichungssystem,

$$(13) \quad f_1(x_1, x_2, \cdots, x_k)=0,\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_k)=0, \cdots,\ f_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)=0,$$

das endlich viele Lösungen $X_1, X_2, \cdots, X_n$ im algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper von P besitzt, jede mit der richtigen Vielfachheit gezählt (vgl. 12 (*Krull*)). Wir nehmen an, daß (13) keine unendlich fernen Lösungen hat, daß also n das Produkt der Grade der f_κ ist. Dann lassen sich die elementarsymmetrischen Funktionen von $X_1, X_2, \cdots, X_n$ in der From $c_\nu = \frac{\psi_\nu}{T}$ darstellen, wo ψ_ν und T Polynome in den Koeffizienten von $f_1, f_2, \cdots, f_k$ sind. *Jede ganze symmetrische Funktion der X_ν kann rational durch die Koeffizienten der f_κ ausgedrückt werden; im Nenner treten nur Potenzen von T auf.* Dabei ist die Charakteristik von P als 0 vorausgesetzt.

Der Beweis ergibt sich leicht aus einer Formel für Resultanten[23], wenn man zu (13) die weitere Gleichung $u_1x_1 + \cdots + u_kx_k + t = 0$ hinzufügt, die Gleichungen homogen macht und die Resultante als Funktion von $t, u_1, \cdots, u_k$ betrachtet.

---

22) *A. Brill*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 757, 1893; *F. Junker*, Math. Ann. **38**, 91, 1891; **43**, 225, 1893; **45**, 1, 1894.

23) Vgl. etwa *B. L. van der Waerden*, Moderne Algebra Bd. 2, S. 32, (4), Berlin 1931.

B. Invarianten von linearen Gruppen endlicher Ordnung[24]

8. Invarianten. Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe linearer Transformationen G

$$(14) \qquad G: x_\kappa \to x_\kappa^G = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\kappa\lambda} x_\lambda, \quad (\kappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit Koeffizienten $a_{\kappa\lambda}$ aus dem Grundkörper P und von 0 verschiedener Determinante. Eine rationale Funktion $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ mit Koeffizienten aus P, d. h. ein Element des Körpers $Z = P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, geht bei (14) in ein Element $f^G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ von Z über

$$(15) \qquad \begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) \to f(x_1^G, \cdots x_n^G) &= f(\textstyle\sum a_{1\lambda} x_\lambda, \cdots, \sum a_{n\lambda} x_\lambda) \\ &= f^G(x_1, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Diese Abbildung stellt einen Automorphismus (G) von Z dar.

Eine *Invariante* von $\mathfrak{G}$ ist ein Element $J(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ von Z, für das

$$(16) \qquad J^G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = J(x_1, \cdots, x_n)$$

für alle G aus $\mathfrak{G}$ gilt. Bestehen anstelle von (16) Gleichungen

$$(17) \qquad J^G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_G J(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

mit konstanten Faktoren $c_G \neq 0$ aus P, so heißt J eine Relativinvariante von $\mathfrak{G}$. Die c_G bilden dann einen linearen Charakter von $\mathfrak{G}$.

Neben $\mathfrak{G}$ betrachten wir gleichzeitig die zu $\mathfrak{G}$ homomorphen Gruppen $\mathfrak{H}$ von linearen Transformationen und ihre Invarianten. Insbesondere sind die Gruppen $\mathfrak{H}$ von Wichtigkeit, die folgendermaßen erhalten werden: Es sei $A \to T(A)$ eine rationale Darstellung der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}$[20]. Für G in $\mathfrak{G}$ bilden dann die Transformationen $T(G)$ eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Gruppe $\mathfrak{H} = T(\mathfrak{G})$.

Bei geeigneter Wahl von T erhält man so andere für die Invariantentheorie wichtige Begriffsbildungen wie z. B. die Invarianten und Kovarianten einer Grundform. Untergehen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ eine lineare Transformation $x' = A(x)$, so erleiden die Potenzprodukte r-ter Dimension $x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2} \cdots x_n^{\rho_n}$, $(\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n = r)$ ebenfalls eine lineare Transformation $P_r(A)$, die r-te Potenztransformation. Drückt man in der allgemeinen Form r-ten Grades $F(x) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ die x_ν durch die x'_ν aus, so erhält man eine Form $F'(x')$. Die Koeffizienten $u'_1, u'_2, \cdots, u'_n$ von $F'(x')$ hängen mit den Koeffizienten $u_1, u_2, \cdots, u_n$ von $F(x)$ durch die zu $P_r(A)$

24) Für die im folgenden verwendeten Begriffe der Darstellungstheorie vgl. I B 10 (*Magnus*).

kontragrediente Transformation $Q_r(A)$ zusammen. Offenbar sind $P_r(A)$ und $Q_r(A)$ zwei rationale Darstellungen von $\mathfrak{L}$. Die Invarianten von $\mathfrak{H} = Q_r(\mathfrak{G})$ heißen die *$\mathfrak{G}$-Invarianten der Form r-ten Grades.* Es sind rationale Funktionen der Koeffizienten u_μ von F, die ihren Wert nicht ändern, wenn man die u_μ durch die u'_μ (für $A = G$ in $\mathfrak{G}$) ersetzt. Eine *$\mathfrak{G}$-Kovariante der Form r-ten Grades* ist eine Funktion der x_ν und u_μ, die ungeändert bleibt, wenn man diese durch die x'_ν bezw. u'_μ (für $A = G$ in $\mathfrak{G}$) ersetzt. Es handelt sich hier um die Invarianten von $\mathfrak{H} = T(\mathfrak{G})$,

$$T(G) = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & Q_r(G) \end{pmatrix}.$$

Andere Spezialfälle sind die Invarianten, die von mehreren mit x_ν kogredienten Unbestimmtenreihen abhängen, Invarianten und Kovarianten, die die Koeffizienten mehrerer Grundformen und mehrere kogrediente Unbestimmtenreihen enthalten.

Anstelle von Gruppen linearer Transformationen (14) kann man Gruppen allgemeinerer Art betrachten, z. B. Gruppen $\mathfrak{G}$ von *Kollineationen G*

$$G: \; x_\kappa \to x_\kappa^G = \frac{a_{\kappa 0} + a_{\kappa 1}x_1 + \cdots + a_{\kappa n}x_n}{a_{00} + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n}, \quad (\kappa = 1, 2, \cdots, n), \tag{18}$$

wo die $a_{\kappa\lambda}$ in P liegen und ihre Determinante nicht verschwindet. Wie in (16) und (17) definiert man Invarianten und Relativinvarianten. Die linearen Transformationen mit den Matrizen $(a_{\kappa\lambda})$, $(\kappa, \lambda = 0, 1, 2, \cdots, n)$, erzeugen eine Gruppe $\mathfrak{G}_1$ von linearen Transformationen $(n+1)$-ten Grades; es ist $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}_1/\mathfrak{Z}$, wo $\mathfrak{Z}$ aus den Elementen von $\mathfrak{G}_1$ von der Form γE mit γ in P besteht. Jede Invariante von $\mathfrak{G}$ liefert eine Invariante von $\mathfrak{G}_1$, die homogen von der Dimension 0 ist, und umgekehrt.

Noch allgemeiner kann man durch (16) und (17) Invarianten und Relativinvarianten von Gruppen birationaler Transformationen von $Z = P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ erklären.

9. Eigensysteme. Es sei $\mathfrak{H}$ eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Gruppe von linearen Transformationen m-ten Grades. Unter einem zu $\mathfrak{H}$ gehörigen *Eigensystem* versteht man ein System von Funktionen $f_1, f_2, \cdots, f_m$ von $Z = P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, das unter dem Einfluß einer Transformation von $\mathfrak{G}$ die zugeordnete lineare Transformation von $\mathfrak{H}$ erleidet. Ist $m = 1$, so kommt man auf die Relativinvarianten.

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe linearer Transformationen von endlicher Ordnung, so gehören zu jeder homomorphen Gruppe $\mathfrak{H}$ Eigensysteme, die nicht nur aus Nullen bestehen[25]. Man kann die f_μ sogar als ganze homogene Funktionen einer festen Dimension wählen. Anders ausgedrückt: Die r-te Potenztransformation $P_r(G)$ (Nr. 8) hat für geeignete r mit $\mathfrak{H}$ irreduzible Bestandteile gemeinsam. Die in Betracht kommenden r lassen sich mit Hilfe der Gruppencharaktere bestimmen; der Charakter von $P_r(A)$ ist dabei die für die charakteristischen Wurzeln von A gebildete Funktion P_r (Nr. 6). Ist r bekannt, so hängt die Bestimmung eines Eigensystems nur von der Auflösung linearer Gleichungen ab.

Ist J eine Invariante von $\mathfrak{G}$, so bilden $\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial J}{\partial x_n}$ ein zur kontragredienten Gruppe von $\mathfrak{G}$ gehöriges Eigensystem. Ist $\mathfrak{G}$ irreduzibel und J nicht konstant, so folgt, daß J durch nichtsinguläre lineare Transformation nicht in eine Funktion von weniger als n Argumenten übergeführt werden kann[26].

10. Rationalbasis. Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe linearer Transformationen (14) von endlicher Ordnung. Die (absoluten) Invarianten bilden einen Teilkörper K von $Z = P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $P \subset K \subset Z$. Für jedes f aus Z sind die symmetrischen Funktionen der g Größen f^G Elemente von K. Daher genügt jedes f in K einer Gleichung g-ten Grades und folglich hat K in bezug auf P den Transzendenzgrad n (vgl. 10 (*Baer*). Nr. 7). Sind $J_1, J_2, \cdots, J_n$ algebraisch unahbängige Elemente von K, so hat K endlichen Grad über $\Lambda = K(J_1, J_2, \cdots, J_n)$. Hat also P die Charakteristik $\chi(P)=0$, so entsteht K aus Λ durch Adjunktion eines weiteren Elementes J_{n+1}. *Jede Invariante ist als rationale Funktion von* $n+1$ *Invarianten* $J_1, J_2, \cdots, J_{n+1}$ *darstellbar.* Im Fall $\chi(P) \neq 0$ folgt jedenfalls, daß es endlich viele Invarianten gibt, durch die alle rational darstellbar sind.

Der Körper Z ist normal und separabel über K. Seine Galoissche Gruppe besteht aus den g Automorphismen (15), ist also mit $\mathfrak{G}$ identisch.

Alle diese Resultate gelten unverändert, wenn $\mathfrak{G}$ eine Gruppe birationaler Transformationen von endlicher Ordnung ist.[27]

Man sagt, daß n Invarianten eine *Minimalbasis* bilden, wenn jede Invariante rational durch sie darstellbar ist[28]. Aus den Untersuchungen

25) *H. Burckhardt*, Math. Ann. **41**, 309, 1892. Ein Beweis ergibt sich leicht aus Nr. **15**.

26) *W. Burnside*, Theory of groups of finite order, 2. Aufl., S. 367, Cambridge 1911.

27) *E. Noether*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingn 1926, 28.

28) Beispile bei *E. Fischer*, Math. Ann. **77**, 81, 1916; *E. Noether*, Math. Ann. **78**, 221, 1917; *S. Breuer*, Math. Ann. **92**, 126, 1924; J. Reine Angew. Math. **156**, 13, 1926; **166**, 54, 1931; *Ph. Furtwängler*, S. B. Akad. Wiss. Wien **134**, 69, 1925; *W. Gröbner*, Mh. Math. Phys. **41**, 78. 1934.

von *O. F. G. Schilling*[29] ergibt sich die *Existenz von Minimalbasen für alle endlichen Gruppen von birationalen Transformationen* (s. 10 (*Baer*), Nr. 9), falls P die Charakteristik $\chi(P) = 0$ hat. Für Permutationsgruppen gibt es Minimalbasen bei beliebiger Charakteristik $\chi(P)$. Gilt in P der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz (10 (*Baer*), Nr. 40), so folgt daraus, daß es über P Körper mit vorgeschriebener Galoisscher Gruppe gibt.

11. Der Basissatz. Jede Invariante einer Gruppe linearer Transformationen von endlicher Ordnung kann als Quotient ganzer Invarianten dargestellt werden. Zerlegt man eine ganze Invariante in ihre homogenen Bestandteile, so sind diese selbst Invarianten. *Hilbert*[30] bewies für Grundkörper P der Charakterstik $\chi(P) = 0$ den folgenden *Basissatz* : *Es gibt endlich viele ganze homogene Invarianten, durch die sich jede ganze Invariante ganz und rational darstellen läßt.*

Beweis nach E. Noether[31]: Ist $J = J(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ eine ganze Invariante, so ist

$$J = \frac{1}{g} \sum_G J(x_1^G, x_2^G, \cdots, x_n^G), \quad (G \text{ in } \mathfrak{G}).$$

Daher ist J eine symmetrische Funktion der g Systeme $(x_1^G, x_2^G, \cdots, x_n^G)$ und kann daher ganz rational durch deren elementarsymmetrische Funktionen ausgedrückt werden (Nr. 7); diese sind aber selbst Invarianten von $\mathfrak{G}$.

Der Basissatz gilt nach *E. Noether*[27] auch für Körper P mit $\chi(P) \neq 0$.

Ist d der größte gemeinsame Teiler der Grade der Basisinvarianten, so folgt aus Nr. 10 im Fall $\chi(P) = 0$, daß $\mathfrak{G}$ genau d Elemente der Form γE enthält (γ in P, E Einheitsmatrix).

Aus dem Hilbertschen Satz für Polynomideale[30] (s. 12 (*Krull*)) folgt, daß es endlich viele ganze Relativinvarianten $H, H_2, \cdots, H_k$ gibt, durch die sich jede ganze Relativinvariante in der Form

$$F_1 H_1 + F_2 H_2 + \cdots + F_k H_k \tag{19}$$

darstellen läßt, wo die F_κ ganze (absolute) Invarianten sind.

Der Basissatz ist in gewissen wichtigen Fällen auch für Gruppen $\mathfrak{G}$ von unendlicher Ordnung richtig.

Ist P der Körper der komplexen Zahlen, so gilt der Basissatz auch für

29) Amer. J. Math. **59**, 1937.

30) Math. Ann. **36**, 473, 1890. Vgl. auch *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra Bd. 2, 2. Aufl. S. 222—228, Braunschweig 1899.

31) Math. Ann. **77**, 89, 1916.

alle stetigen Darstellungen der halbeinfachen kontinuierlichen Gruppen[32].

12. Beispiele. Ist $\mathfrak{G}$ die Gruppe aller $n!$ Permutationen von n Unbestimmten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$), so sind die Invarianten die symmetrischen Funktionen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Die in A. behandelte Theorie ist also eine spezieller Fall der allgemeinen Theorie der Invarianten. Eigensysteme für die zu $\mathfrak{S}_n$ homomorphen Gruppen hat *W. Specht*[33] angegeben.

Ist $\mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ aller geraden Permutationen, so erhält man eine Basis durch Hinzufügen von

$$\varDelta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_n)$$

zu den elementarsymmetrischen Funktionen $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige Permutationsgruppe n-ten Grades von der Ordnung g, so folgt aus der Galoisschen Theorie in Verbindung mit Nr. **10**, daß es immer rationale Funktionen $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ gibt, die bei den Permutationen von $\mathfrak{G}$ ungeändert bleiben, während sie bei den $n!$ Permutationen von $\mathfrak{S}_n$ im ganzen $\frac{n!}{g} = h$ verschiedene Werte annehmen. Jede Invariante von $\mathfrak{G}$ läßt sich als Polynom vom Grad $g-1$ in $f(x_1, \cdots, x_n)$ mit Koeffizienten aus dem Körper $P(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ darstellen. Sätze über Permutationsgruppen liefern dann Aussagen über solche h-wertigen Funktionen[34].

Für die wichtigsten Gruppen der niedrigsten Grade sind die Invarianten von verschiedenen Autoren[35] aufgestellt worden. Hat man eine homogene Invariante r-ten Grades gefunden, so erhält man daraus neue Invarianten durch Bildung der $\mathfrak{L}$-Kovarianten der Form r-ten Grades, wo $\mathfrak{L}$ die volle lineare Gruppe bedeutet.

Von anderem Gesichtspunkt aus sind die Invarianten der Darstellungen der vollen linearen Gruppe mit Koeffizienten aus einem Galoisfeld (10 (*Baer*), Nr. 36) von *L. E. Dickson* und seiner Schule untersucht worden[36].

32) S. *D. Hilbert*[30]; *A. Hurwitz*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1897, 71; *H. Weyl*, Math. Z. **24**. 377, 1925.

33) Math. Z. **39**, 696, 1935.

34) Vgl. I B 10 (*Magnus*)

35) Für die Kollineationsgruppen mit $n = 1$ s. *F. Klein*, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884, Kapitel 2. Spezielle Kollineationsgruppen vom Grad n und der Ordnung g sind u. a. untersucht worden für: $n = 2$, $g = 168$, *F. Klein*, Math. Ann. **14**, 37, 1879; $n = 2$, $g = 216$, *H. Maschke*, Math. Ann. **33**, 324, 1889; $n = 2$, $g = 360$, *A. Wiman*, Math. Ann. **47**, 531, 1896; $n = 3$, $g = 11520$, *H. Maschke* Math. Ann. **30**, 496, 1887; $n = 3$, $g = 25920$, *H. Maschke*, Math. Ann. **33**, 317, 1889.

36) Vgl. die Darstellung und Literaturangaben bei *D. E. Rutherford*, Modular invariants, Cambridge 1932.

13. Abzählungsaufgaben. Wir bestimmen die Anzahl N_r der linear unäbhängigen ganzen homogenen Invarianten r-ten Grades für eine Gruppe linearer Transformationen $\mathfrak{G}$ von endlicher Ordnung g. Die Charakteristik des Grundkörpers P muß dabei als 0 vorausgesetzt werden.

Die Zahl N_1 gibt an, wie oft $\mathfrak{G}$ die 1-Darstellung $G \to 1$ als irreduziblen Bestandteil enthält. Ist $\chi(G)$ der Charakter von $\mathfrak{G}$, so folgt (vgl. 15 (*Magnus*))

$$N_1 = \frac{1}{g} \sum_G \chi(G) \qquad (G \text{ in } \mathfrak{G}). \tag{20}$$

Die Zahl N_r ist die Anzahl der linear unabhängigen linearen Invarianten von $P_r(\mathfrak{G})$ (vgl. Nr. 8), und aus dem Wert des Charakters von $P_r(G)$ (Nr. 9) (11) und (20) folgt

$$N_r = \frac{1}{g} \sum_G \sum_{\mu_1+2\mu_2+\cdots+r\mu_r=r} \frac{1}{1^{\mu_1}\mu_1!\, 2^{\mu_2}\mu_2! \cdots r^{\mu_r}\mu_r!} \chi(G)^{\mu_1}\chi(G_2)^{\mu_2} \cdots \chi(G_r)^{\mu_r}. \tag{21}$$

Allgeminer bezeichnen wir mit $N_{m_1, m_2, \dots, m_r}(\mathfrak{G})$ die Anzahl von linear unabhängigen Invarianten von $T_{m_1, m_2, \dots, m_r}(\mathfrak{G})$ (vgl. Nr. 6), verschwindende Indizes m_ν werden dabei weggelassen. Mit Hilfe von (11) und (12) lassen sich auch diese Zahlen aus dem Charakter von $\mathfrak{G}$ berechnen.

Der Spezialfall quadratischer und bilinearer Invarianten ist von *Frobenius* und *I. Schur*[37] behandelt worden. Es sei P ein algebraisch abgeschlossener Zahlkörper und G sei irreduzibel. Dann gibt es abgesehen von einem konstanten Faktor höchstens eine invariante Bilinearform in zwei kogredienten Variabelnreihen (14), man hat drei Fälle zu unterscheiden: I. $N_2(\mathfrak{G}) = 1$, $N_{1,1}(\mathfrak{G}) = 0$: Es gibt eine quadratische Invariante und damit eine invariante symmetrische Bilinearform. Es ist $\sum \chi(G^2) = g$. II. $N_2(\mathfrak{G}) = 0$, $N_{1,1}(\mathfrak{G}) = 1$: Hier gibt es eine invariante schiefsymmetrische Bilinearform. G hat reellen Charakter, ist aber nicht zu einer in einem reellen Zahlkörper liegenden Gruppe äquivalent, $\sum \chi(G^2) = -1$. III. $N_2(\mathfrak{G}) = 0$, $N_{1,1}(\mathfrak{G}) = 0$: Der Charakter von $\mathfrak{G}$ ist nicht reell. Es gibt keine invariante Bilinearform; $\sum \chi(G^2) = 0$.

Bildet man alle linearen Verbindungen von Matrizen von $\mathfrak{G}$ mit reellen Koeffizienten, so erhält man eine einfache Algebra (vgl. 13 (*Brauer*) Nr. **13**) über dem Körper der reellen Zahlen. Die zugeordnete Divisionsalgebra ist im Fall I der Körper der reellen Zahlen, im Fall II die Quaternionenalgebra, im Fall III der Körper der komplexen Zahlen.

Auch eine reduzible Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann einer reellen Gruppe äquivalent, wenn sie eine nichtentartete quadratische Invariante

37) S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1906, 186.

besitzt.

Sind $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_k$ die wesentlich verschiedenen irreduzilben Darstellungen einer abstrakten Gruppe Γ von endlicher Ordnung, und hat $\mathfrak{G}_\kappa$ den Grad n_k, so gilt

$$\sum_\kappa (N_2(\mathfrak{G}_\kappa) - N_{1,1}(\mathfrak{G}_\kappa)) = k',$$

wo k' die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente in Γ ist, die mit G auch G^{-1} enthalten. Es ist also k' die Gesamtanzahl der Darstellungen 1. und 2. Art. Ferner ist

$$\sum_\kappa n_\kappa(N_2(\mathfrak{G}_\kappa) + N_{1,1}(\mathfrak{G}_\kappa))$$

gleich der Anzahl der Lösungen von $X^2 = E$ in Γ.

In den Fällen $m_1 + m_2 + \cdots > 2$ kann man ähnliche Relationen aufstellen, z. B. ist

$$\sum_\kappa N_3(\mathfrak{G}_\kappa) - N_{1,1,1}(\mathfrak{G}_\kappa)) = k''$$

die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente in Γ, die mit G auch G^{-2} enthalten.

Jede Gruppe endlicher Ordnung besitzt eine invariante positivdefinite Hermitesche Form[38)].

Ist Ω der von den Charakteren der Elemente G von $\mathfrak{G}$ erzeugte Körper, so bilden die linearen Verbindungen der Elemente G mit Koeffizienten aus Ω eine normale einfache Algebra A über Ω. Der Index μ von A teilt dann $(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)N_{m_1, m_2, \cdots, m_n}(\mathfrak{G})$ für jedes $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n$[39)].

Die oben geschilderte Methode zur Berechnung der Invariantenzahlen kann auch für die halbeinfachen kontinuierlichen Gruppen verwendet werden, wenn die Summation über G durch eine Hurwitzsche Integration ersetzt wird[40)]. Im Fall der vollen linearen Gruppe kann man auch die Resultate von Nr. **6** verwenden. Es handelt sich darum, den Charakter Ψ einer gewissen rationalen Darstellung durch die irreduziblen Charaktere $\Phi(m_1, m_2, \cdots, m_n)$, $(m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n)$, auszudrücken und festzustellen, wie oft ein Summand $\Phi(0, 0, \cdots, 0)$ auftritt. Im Fall negativer m hat man p_m in (12) mit Hilfe von (9) zu definieren. Es ist aber Ψ eine symmetrische Funktion der charakteristischen Wurzeln des allgemeinen

38) *A. Loewy*, C. R. **123**, 168, 1896; *E. H. Moore*, Chicago Univ. Rec. 1896; Math. Ann. **50**, 213, 1898.

39) *R. Brauer*, S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1926, 410; in Verbindung mit *H. Hasse*, *E. Noether*, J. Reine Angew. Math. **167**, 399, 1931.

40) *I. Schur*, S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1924, 189, 297, 346; *H. Weyl*[32)].

Elements A, so daß man sofort eine Darstellung durch die $\Phi(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ erhält. Diejenigen Summanden, in denen nicht $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n$ ist, lassen sich durch Umordnung der Zeilen in (12) in solche mit $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n$ überführen.

C. Das Kleinsche Formenproblem

14. Das Kleinsche Formenproblem[41]**.** Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe linearer Transformationen oder allgemeiner eine Gruppe birationaler Transformationen; die Ordnung sei endlich. Die Bezeichnungen seien dieselbe wie in Nr. 8. Wir ersetzen die Unbestimmten x_ν durch Werte ξ_ν eines festen Erweiterungskörpers von P. Dabei sind aber Punkte $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ auszuschließen, für die Nenner in den die Gruppenelemente definierenden Transformationsgleichnungen (z. B. (18)) verschwinden. Als *Kleinsches Formenproblem für* $\mathfrak{G}$ bezeichnet man die Aufgabe, die Koordinaten ξ_ν eines Punktes zu bestimmen, wenn nur die Werte der Invarianten J von $\mathfrak{G}$ in diesem Punkte gegeben sind. Die Bildpunkte von $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ bei den Transformationen G von $\mathfrak{G}$ liefern ebenfalls Lösungen; weitere Lösungen gibt es nicht.

Der Einfachheit halber schließen wir Punkte $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ aus, die bei von der Identität verschiedenen Transformationen von $\mathfrak{G}$ als Fixpunkte auftreten. Ist dann K' der Körper der durch Adjunktion von $J(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ für alle Invarianten J zu P entsteht, so ist $P(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = Z'$ ein Normalkörper über K'. Die zugehörige Galoissche Gruppe ist einer Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ isomorph. Ist dabei $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$, so liegen die Invarianten von $\mathfrak{F}$ für $x_\nu = \xi_\nu$ sämtlich in K'; anstelle des Formenproblems für $\mathfrak{G}$ betrachtet man dann ein Formenproblem von $\mathfrak{F}$. Im "*allgemeinen Fall*", wenn $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ algebraisch unabhängig in bezug auf P sind, ist die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ nach Nr. **10.**

Sind $J_1, J_2, \cdots, J_n$ algebraisch unabhängige Invarianten (am zweckmäßigsten die Invarianten einer Minimalbasis), so sind die x_ν nach Nr. 10 algebraische Funktionen der J_λ, $x_\nu = \varphi_\nu(J_1, J_2, \cdots, J_n)$. Diese Funktionen lösen das Kleinsche Formenproblem; dabei schließen wir Punkte $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ aus, in denen die Nenner in einigen der J_ν verschwinden, oder die J_ν Werte annehmen, für die $\varphi_\nu(J_1, J_2, \cdots, J_n)$ nicht definiert ist. Alle bisher ausgeschlossenen Pukte $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ liegen jedenfalls in einer Hyperfläche $H(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$.

Das Kleinsche Formenproblem liefert eine von Parametern J_ν abhäng-

41) *F. Klein*, Math. Ann. **15**, 253, 1879; The Evanston Colloquium, Lectures on Mathematics, New York 1894, S. 72. Vgl. auch *Weber*[30], S. 228.

ende Normalgleichung, deren Galoissche Gruppe im allgemeinen Fall zu $\mathfrak{G}$ isomorph ist. Es entsteht die Frage, ob man mit Hilfe dieser Gleichung beliebige Gleichungen mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher Gruppe auflösen kann. Es sei also $f(t) = 0$ eine separable Gleichung m-ten Grades mit Koeffizienten aus P; $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ seien die Wurzeln von $f(t) = 0$ in einem Erweiterungskörper von P. Die Galoissche Gruppe sei zu $\mathfrak{G}$ isomorph. Die Frage, ob man $f(t) = 0$ mit Hilfe eines Kleinschen Formenproblems für $\mathfrak{G}$ auflösen kann, kommt auf die folgende Frage hinaus: Gibt es Größen $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ in $\Omega = P(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$, für die $J(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ für alle Invarianten J in P liegt und $P(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \Omega$ ist? Dazu kann man die Zusatzforderung stellen, daß ein gegebenes Polynom $H(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ mit Koeffizienten aus P nicht in $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ verschwinden soll.

Von Interesse ist dabei der Fall, daß n klein ist und daß $f(t)$ Parameter enthält, z. B. die allgemeine Gleichung m-ten Grades ist. Ist die Rückführbarkeit möglich, so enthält man Auflösungsformeln für $f(t) = 0$, die aus algebraischen Funktionen von einer kleinen Anzahl von Parametern zusammengesetzt sind[42].

Erwähnt sei der Spezialfall $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_n$. Hier kann man I_κ als die elementarsymmetrische Funktion c_κ der x_ν wählen. Das Formenproblem ist dann identisch mit der Aufgabe der Auflösung der Gleichung n-ten Grades $x^n - c_1x^{n-1} + \cdots \pm c_n = 0$.

15. Der Fall einer Gruppe linearer Transformationen[43]. Wir behandeln die in Nr. **14** formulierte Frage für Gruppen $\mathfrak{G}$ linearer Transformationen; *die Auflösung von $f(t) = 0$ mit Hilfe eines Kleinschen Formenproblems ist hier stets möglich.* Der Körper $\Omega = P(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ besitzt eine Normalbasis $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r$ (10 (*Baer*) Nr. 28) in bezug auf P. Bei Anwendung eines Automorphismus γ der Galoisschen Gruppe Γ erleiden dann $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r$ die lineare Transformation R_γ, die γ in der regulären Darstellung $\mathfrak{R}$ von Γ (15 (*Magnus*)) entspricht,

$$\zeta^\gamma = R_\gamma(\zeta)^{44)}.$$

Hat nun zunächst der Grundkörper die Charakteristik 0 und ist $\mathfrak{G}$ absolut irreduzibel vom Grad n, so enthält $\mathfrak{R}$ die Gruppe $\mathfrak{G}$ genau n-mal als Bestandteil. Man kann daher lineare Verbindungen $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ der ζ_ρ

42) Für die Frage nach Resolventen von Gleichungen, die von einer kleinen Zahl von Parametern abhängen vgl. *N. Tschebotareff*, Math. Ann. **104**, 459; **105**, 246, 1931.

43) *A. Speiser*, Math. Ann. **77**, 546, 1916; *E. Noether*, J. Reine Angew. Math. **167**, 147, 1931; *R. Brauer*, Math. Ann. **110**, 473, 1934.

44) Es bezeichnet ζ_ν^γ die aus ζ_ν durch den Automorphismus γ hervorgehende Größe.

mit Koeffizienten aus P bilden, für die

$$\xi^{\gamma} = G_{\gamma}(\xi) \tag{22}$$

ist, wo G_{γ} das γ entsprechende Element von $\mathfrak{G}$ ist. Es gibt sogar n derartige Größenreihen, und die n^2 in ihnen vorkommenden Größen sind linear unabhängig in bezug auf P. Wegen (22) liegt $J(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ für alle Invarianten J in P. Ersetzt man $\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n$ durch eine geeignete lineare Verbindung der n gefundenen Größenreihen, so kann man die weiteren Bedingungen von Nr. 14 erfüllen. Dies zeigt die Möglichkeit der Rückführung von $f(t) = 0$ auf ein Formenproblem. Dasselbe Resultat gilt, wenn $\mathfrak{G}$ nicht absolut irreduzibel ist, und wenn P eine von 0 verschiedene Charakteristik hat[45].

Will man die ξ_ν als Funktion der θ_μ rechnerisch finden, so ist die Verwendung einer Normalbasis komplizert, und man geht oft besser anders vor. Unter dem Einfluß der Automorphismen γ von Γ erleiden die θ_μ die Transformationen einer isomorphen Permutationsgruppe $\mathfrak{G}_0$. Wendet man auf $\mathfrak{G}_0$ anstelle von $\mathfrak{G}$ die Betrachtungen von Nr. 9 an, so gehört zu jeder zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphen Gruppe $\mathfrak{H}$ ein Eigensystem. Wählt man $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, so erhält man Größen ξ_ν als Funktionen der θ_μ, die (22) erfüllen[46].

Als Beispiel betrachten wir zyklische Gruppen $\mathfrak{G}$ von Primzahlordnung l. Ist die Charakteristik von P von l verschieden, so nehmen wir an, daß P eine primitive l-te Einheitswurzel ε enthält. Die Größen $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{l-1}$ bilden eine Darstellung ersten Grades von Γ; als Basisinvariante kann man $x^l = J$ verwenden. Das Formenproblem ist mit der Auflösung der reinen Gleichung $x^l = J$ für x identisch, und daher kann jede zyklische Gleichung l-ten Grades über P auf eine reine Gleichung zurückgeführt werden. Bei rechnerischer Durchführung dieser Betrachtung wird man auf die Lagrangeschen Resolventen geführt.

Hat P die Charakteristik l, so bilden

$$S^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^\lambda, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, l-1$$

eine Darstellung von $\mathfrak{G}$. Als Invariantenbasis erhält man

$$J_1 = x_1, \ J_2 = x_1^l - x_1 x_2^{l-1}.$$

In (22) muß ξ_1 in P liegen, man darf annehmen $\xi_1 = 1$. Daher enthält

45) Der bei *Brauer*[43] in der Fußnote auf S. 485 gegebene Beweis gilt bei beliebiger Charakteristik, Schwierigkeiten treten nur bei der Bedingung $H \neq 0$ im Fall eines endlichen Grundkörpers P auf, doch ist in diesem Fall die Bedingung überflüssig.

46) Eine andere Methode bei *Speiser*[43].

$P(\theta_1)$ eine den Körper erzeugende Größe $\xi = \xi_2$, die eine Gleichung $\xi^l - \xi = J$ mit J in P erfüllt[47].

Ein anderer in der Literatur vielfach behandelter Fall ist der einer einfachen Gruppe dritten Grades von der Ordnung 168[48].

16. Kollineationsgruppen[49]. Die Frage der Rückführbarkeit einer Gleichung $f(t) = 0$ auf ein Formenproblem für eine Kollineationsgruppe $\mathfrak{G}$ hängt eng mit der Algebrentheorie (13 (*Brauer*)) zusammen, für die tieferen Gründe hierfür vgl. man die Schlußbemerkung von Nr. **16.**

Dem Element γ der Galoisschen Gruppe Γ von $P(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) = \Omega$ entspreche G_γ in der isomorphen n-dimensionalen Kollineationsgruppe, M_γ sei eine zu G_γ gehörige Matrix $(n+1)$-ten Grades (vgl. (18)). Man betrachte alle Matrizen $U = (u_{\kappa\lambda})$, $(\kappa, \lambda = 0, 1, \cdots, n)$ mit Koeffizienten aus Ω, die

$$(u_{\kappa\lambda}^{\gamma}) = M_\gamma \cdot (u_{\kappa\lambda}) \cdot M_\gamma^{-1} \tag{23}$$

für alle γ aus Γ erfüllen. (23) ist gleichwertig damit, daß die $(n+1)^2$ Größen $u_{\kappa\lambda}^{\gamma}$ aus den $u_{\kappa\lambda}$ durch die lineare Transformation $H_\gamma = M_\gamma \times M_\gamma'^{-1}$ [50] hervorgehen

$$u^\gamma = H_\gamma(u)\,. \tag{24}$$

Die H_γ bilden eine zu Γ isomorphe Gruppe linearer Transformationen, während dies für die M_γ nicht der Fall zu sein braucht. Nach Nr. 15 kann man $(n+1)^2$ Systeme $u_{\kappa\lambda}$ finden, die (24) befriedigen. Man erhält so $(n+1)^2$ Matrizen U, die (23) erfüllen und linear unabhängig in bezug auf P sind. Die Gesamtheit aller in (23) möglichen Matrizen U bildet eine normale einfache Algebra A der Ordnung $(n+1)^2$ über P, die eben konstruierten speziellen Matrizen bilden eine Basis.

Ist $\gamma \to \gamma^*$ ein Automorphismus der Gruppe Γ, so liefert $\gamma \to G_{\gamma*}$ ebenfalls eine Kollineationsdarstellung $\mathfrak{G}^*$ von Γ. Wir konstruieren für alle diese $\mathfrak{G}^*$ die entsprechenden Algebren und erhalten so ein System $A, A_1, \cdots, A_{s-1}$ von Algebren. Dann gilt: *Dann und nur dann kann $f(t) = 0$ mit Hilfe eines Formenproblems für $\mathfrak{G}$ aufgelöst werden, wenn*

47) *E. Artin - O. Schreier*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 5, 225, 1927.

48) *F. Klein*, Math. Ann. **15**, 226, 1879 = Gesammelte Mathematische Abbandlungen 2, 390; Bemerkungen von *Klein* zu Gordans Arbeiten, ebd. S. 426; *P. Gordan*, Math. Ann. **20**, 515, 1882; **25**, 459, 1885; *R. Fricke*, Lehrbuch der Algebra Bd. 2, S. 182—240, Braunschweig 1926.

49) S. *R. Brauer*[43].

50) Es bezeichnet $M_\gamma \times M_\gamma'^{-1}$ die Kroneckersche Prcduktformation aus M_γ und der kontragredienten Transformation $M_\gamma'^{-1}$.

eine der Algebren A_λ einer vollen Matrixalgebra über P isomorph ist.

Im allgemeinen ist diese Bedingung nicht erfüllt. Entsteht z. B. Ω aus P durch Auflösung eines allgemeinen Formenproblems (Nr. **14**) für eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{H}$ von linearen Transformationen, so ist die Rückführbarkeit von $f(t)=0$ auf ein Formenproblem für $\mathfrak{G}$ dann und nur dann möglich, wenn die Matrizen M_τ bei geeigneter Wahl der willkürlichen Proportionalitätsfaktoren eine zu Γ isomorphe Gruppe bilden.

Man kann stets die Rückführbarkeit von $f(t)=0$ auf ein Formenproblem für $\mathfrak{G}$ dadurch erzwingen, daß man P durch einen umfassenderen Körper, nämlich einen Zerfällungskörper einer der Algebren A_λ ersetzt. Dies kann folgendermaßen geschehen: Es gibt in A Matrizen U_0, die eine einfache charakteristische Wurzel τ besitzen. Man setze $\bar{P}=P(\tau)$, $\bar{\Omega}=\Omega(\tau)$.

Durch Auflösen der linearen Gleichungen

$$U_0(\omega)=\tau\cdot(\omega)$$

erhält man ein System $(\omega)=(\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n)$ in $\bar{\Omega}$, für das

$$\omega^\tau=\alpha_\tau M_\tau(\omega)$$

mit Faktoren $\alpha_\tau\neq 0$ aus $\bar{\Omega}$ gilt. Für jedes U aus A erfüllt $\omega^*=U(\omega)$ die entsprechenden Gleichungen. Man kann U so wählen, daß $\omega_0^*\neq 0$ ist. Setzt man $\xi_\nu=\dfrac{\omega_\nu^*}{\omega_0^*}$ für $\nu=1, 2, \cdots, n$, so gilt

$$\xi^\tau=G_\tau(\xi). \tag{25}$$

Alle Invarianten J von G liegen für $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ in $\bar{P}$. Man kann über U noch weiter so verfügen, daß die weiteren Bedingungen in Nr. **14** erfüllt sind. *Nach Adjunktion einer geeigneten algebraischen Größe τ von höchstens $(n+1)$-tem Grad zu P ist die Rückführbarkeit von $f(t)=0$ auf ein Formenproblem für $\mathfrak{G}$ möglich.* Es kann dabei sein, daß eine der Algebren A_λ einen echten Teiler μ von $n+1$ als Index besitzt. Dann genügt bereits die Auflösung einer Hilfsgleichung μ-ten Grades.

Trotz der Unvermeidlichkeit derartiger Hilfsgleichungen bevorzugt man in vielen Fällen Formenprobleme für Kollineationsgruppen vor denen für lineare Transformationen, da es Kollineationsdarstellungen gegebener abstrakter Gruppen von kleinerem Grad als n gibt.

Wir fügen noch eine Bemerkung hinzu, um den Zusammenhang mit der Algebrentheorie klarer zu machen. Es seien etwa die Matrizen M_τ unimodular, und zwar seien sie so gewählt, daß sie eine Gruppe $\mathfrak{G}_1$ von möglichst kleiner Ordnung erzeugen. Dann ist $\mathfrak{G}$ einer Faktorgruppe von

$\mathfrak{G}_1$ nach einer zyklischen invarianten Untergruppe isomorph. Die Frage nach der Rückführbarkeit von $f(t) = 0$ auf ein Formenproblem für $\mathfrak{G}$ hängt dann eng damit zusammen, ob man Ω in einen Normalkörper mit der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ über P einbetten kann. Dies ist aber mit Problemen der Algebrentheorie (13 (*Brauer*) Nr. 25) äquivalent.

17. Gleichungen 5-ten, 6-ten und 7-ten Grades[51]. Es sei $f(t) = 0$ eine nicht durch Radikale auflösbare Gleichung 5-ten Grades. Wir setzen voraus, daß die Charakteristik $X(P)$ von P von 2, 3 und 5 verschieden ist, und daß P die 5-ten Einheitswurzeln und die Quadratwurzel aus der Diskriminante von $f(t)$ enthält. Die Galoissche Gruppe Γ von $f(t) = 0$ ist dann die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_5$. Diese besitzt eine Kollineationsdarstellung $\mathfrak{G}$ vom Grad $n = 1$, die *Ikosaedergruppe*. Die Basisinvariante von $\mathfrak{G}$ ist

$$(26) \qquad J = ((x^{20}+1) - 228\,(x^{15} - x^5) + 494 x^{10})^3 : -1728 (x^{11} + 11 x^6 - x)^5.$$

Das Formenproblem besteht in der Bestimmung von x bei gegebenem J. Dies ist eine Gleichung 60-ten Grades für x, die *Ikosaedergleichung*.

Adjungiert man zu P eine geeignete Größe $\tau = \sqrt{v}$ mit v in P, so kann man nach Nr. **16** $f(t) = 0$ mit Hilfe einer Gleichung (26) vollständig lösen, wobei J in $P(\tau)$ liegt. Die Lösung der Gleichungen 5-ten Grades kann also mit Hilfe von Quadratwurzeln und der durch (26) definierten algebraischen Funktion $x = \varphi(J)$ bewerkstelligt werden. Dies kann zur Grundlage der analytischen Behandlung der Gleichungen 5-ten Grades gemacht werden[52].

Alle und nur diejenigen Größen τ sind brauchbar, für die $P(\tau)$ Zerfällungskörper einer Quaternionenalgebra A sind. Für spezielle Gleichungen $f(t) = 0$ kann A einer vollen Matrixalgebra aus P isomorph sein, so daß keine Adjunktion notwendig ist. Im andern Fall liegt τ sicher nicht in $P(\theta_1, \cdots, \theta_5)$, ist also für die Auflösung von $f(t) = 0$ eine *akzessorische Irrationalität.*

Die Rückführung von $f(t) = 0$ auf (26) kann nach der Methode von Nr. **16** rechnerisch durchgeführt werden. Die Gruppen $P_3(\mathfrak{A}_5)$ und H_r in (24) haben einen Bestandteil gemeinsam, wie sich durch Berechnung

51) *F. Klein*, Ikosaeder[35]; ausführliche historische und Literaturangaben über Gleichungen 5-ten Grades; Math. Ann. **28**, 1, 1887; J. Reine Angew. Math. **129**, 84, 1905; *P. Gordan*, Math. Ann. **61**, 453, 1906; **68**, 1, 1910; 1900; *A. B. Coble*, Math. Ann. **70**, 337, 1911; *R. Fricke*, Algebra Bd. 2[48], S. 52—181, 241—329; *R. Brauer*[43]. *A. B. Coble*, Trans. Amer. Math. Soc. **9**, 396, 1908; **12**, 311, 1911, behandelt Gleichungen 5-ten und 6-ten Grades mit Hilfe des Formenproblems einer Gruppe birationaler Transformationen. Es sei hier auch auf *A. B. Coble*, Bull. Amer. Math. Soc. **30**, 301, 1924 hingewiesen.

52) S. etwa *Klein*, Ikosaeder[35]; *Fricke*, Algebra Bd. 2[48], Abschnitt 1, Kapitel 4.

der Charaktere ergibt. Daher gibt es eine Matrix U in A, deren Elemente Funktionen 3-ten Grades der Wurzeln θ_μ von $f(t)=0$ sind. Mit Hilfe von U erhält man dann τ und ξ, derart daß $P(\theta_1, \cdots, \theta_5, \tau) = P(\xi, \tau)$ ist und ξ eine Gleichung (26) mit J in $P(\tau)$ erfüllt.

Wir betrachten insbesondere die *allgemeine Gleichung* 5-ten Grades $f(t) = 0$ mit der Gruppe $\mathfrak{A}_5$. Hier sind die Koeffizienten Unbestimmte in bezug auf einen die 5-ten Einheitswurzeln enthaltenden Körper P_0, und P ist der durch die Adjunktion der Koeffizienten und der Quadratwurzel aus der Diskriminante zu P_0 entstehende Körper. Nach Nr. **16** ist in diesem Fall die Adjunktion einer Quadratwurzel τ unvermeidbar. Weitergehend gilt der Satz von *Kronecker*[53], daß $f(t) = 0$ keine einparametrige Resolvente der Form $g(x, p) = 0$ besitzt, wo $g(x, y)$ ein Polynom von x, y mit Koeffizienten aus P_0 ist, und P eine Größe aus P bedeutet.

Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_6$ besitzt eine Kollineationsdarstellung $\mathfrak{G}$ mit $n = 2$, die *Valentinergruppe*, vorausgesetzt daß P die dritten Einheitswurzeln und $\sqrt{5}$ enthält. Das Formenproblem von $\mathfrak{G}$ ist mit der Auflösung einer von 2 Parametern abhängenden Normalgleichung 360-ten Grades gleichwertig. Gleichungen 6-ten Grades mit alternierender Gruppe $\mathfrak{A}_6$ können auf diese Gleichung zurückgeführt werden, wenn man zu einem Zerfällungskörper einer gewissen normalen einfachen Algebra A der Ordnung 9 übergeht. Nach einem Satz von *Wedderburn*[54] kann man dies durch Adjunktion einer Kubikwurzel $\sqrt[3]{v}$ mit v in P bewerkstelligt werden. Im allgemeinen Fall ist eine derartige Adjunktion unvermeidbar.

Bei der Gleichung 7-ten Grades kann man analog von einer dreidimensionalen Kollineationsdarstellung von $\mathfrak{A}_7$ Gebrauch machen. Bei der Rückführung der gegebenen Gleichung auf ein Formenproblem tritt hier eine Algebra A der Ordnung 16 anf. Nach einem Satz von *A. A. Albert*[54] kann man einen Zerfällungskörper durch Adjunktion zweier Quadratwurzeln erhalten.

Für $m \geqq 8$ besitzt $\mathfrak{A}_m$ in Körpern der Charakteristik 0 keiner Kollineationsdarstellungen von einem Grad $n < m-2$, wie *Wiman*[55] gezeigt hat. *I. Schur*[56] hat für Körper der Charakteristik 0 alle Kolline-

53) *F. Klein*, Ikosaeder [35], S. 258; *P. Gordan*, Math. Ann. **29**, 1, 1887; *H. Weber*, Algebra Bd. 2[30], S. 477.

54) S. I A 8 (*Brauer*) Nr. **19**.

55) Math. Ann. **52**, 243, 1899.

56) J. Reine Angew. Math. **139**, 155, 1911.

ationsdarstellungen von $\mathfrak{S}_m$ und $\mathfrak{A}_m$ bestimmt[57].

(*Received August 14, 1978*)

57) Formenprobleme für andere spezielle Gruppen mit Anwendung anf die Gleichung 6-ten Grades und die Gleichung für die 27 Geraden einer Fläche 3-ten Grades werden behandelt bei *H. Maschke*, Math. Ann. **30**, 506, 1887; Rendiconti Accad. d. L. Roma (4) **4**, 301; *F. Brioschi*, ebd. 181, 485; Acta Math. **12**, 83, 1888; Annales École Norm. (3) **12**, 343, 1895; *F. Klein*, J. Math. Pur. Appl. (4) **4**, 169, 1887; *H. Burckhardt*, Math. Ann. **41**, 317, 1892; *A. B. Coble*, Trans. Amer. Math. Soc. **18**, 331, 1917.