Math. J. Okayama Univ. 21 (1979), 53—89

ALGEBRA DER HYPERKOMPLEXEN ZAHLENSYSTEME (ALGEBREN)*)

RICHARD BRAUER IN TORONTO

Inhaltsübersicht

A. Grundbegriffe

B. Die Strukturtheorie

C. Einfache Algebren endlicher Ordnung

D. Ergänzungen

---

*) This posthumous article, one of two articles commisioned by B. G. Teubner of Leipzig for the Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (I B 8), was completed in 1936. The political development in Germany then prevented its publication.

Lehrbucher und Monographien

E. Cartan, Nombres complexes, exposé, d'apres l'article allemand de E. Study, Encyclopédie des sciences mathématiques I 5, Paris und Leipzig 1908.
J. H. M. Wedderburn, On hypercomplex numbers, Proceedings L. M. S. (2) **6**, 77, 1908.
L. E. Dickson, Linear algebras, Cambridge 1914.
G. Scorca, Corpi numerici ed algebre, 1921 (Messina)
L. E. Dickson, Algebras and their arithmetics, Chicago 1923, Deutsche Bearbeitung: Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927.
B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. 2, Berlin 1931.
M. Deuring, Algebren, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, IV, 1, Berlin 1935.

A. Grundbegriffe

1. Problemstellung. Historische Bemerkungen. Im Anfang des 19. Jahrhunderts waren die gewöhnlichen komplexen Zahlen und ihre Einführung durch Rechnen mit Zahlenpaaren order Punkten in der Ebene Allgemeingut der Mathematiker geworden. Natürgemäß entstand die Frage, ob man nicht ähnlich "hyperkomplexe" Zahlen definieren kann, die dnrch Punkte eines n-dimensionalen Raumes darstellbar sind. Allerdings zeigte es sich, daß man bei derartigen Erweiterungen des Systems der reellen Zahlen auf einige der üblichen Axiome verzichten muß (*Weierstraß* 1863). In der Auswahl der Rechenregeln, die man bei hyperkomplexen Zahlen nicht fallen lassen will, liegt natürlich eine Willkür. Doch wird man jedenfalls fordern, daß die zugelassenen Zahlsysteme eine einheitliche Theorie hinsichtlich ihrer Struktureigenschaften und ihrer Klassifikation erlauben. Ferner wird man verlangen, daß diese Theorie in innerem Zusammenhang mit anderen Gebieten der Mathematik steht, womit dann auch ihre Anwendungsmöglichkeit gegeben ist.

Der Begriff der hyperkomplexen Zahl, wie er hier zugrunde gelegt werden soll, (vgl. Nr. 2) geht auf *Hamilton* zurück. Wichtige Beispiele bilden die Quaternionen (*Hamilton* 1843) und die Matrizen (*Cayley* 1858). Übrigens war *Gauß* bereits 1819 im Besitz von Formeln, die mit den Quaternionengesetzen eng zusammenhängen. Die *Graßmannsche Ausdehnungslehre* ist ein anderer Ausgangspunkt für die Untersuchungen gewesen. Eine zusammenhängende Theorie wurde von *Molien* 1893 und unabhängig von *E. Cartan* gegeben und von *Frobenius* vereinfacht und ausgebaut. Dabei handelte es sich im wesentlichen immer um hyperkomplexe Erweiterungen des Systems der reellen order der gewöhnlichen komplexen Zahlen. Erst *Wedderburn* 1908 untersuchte systematisch Erweiterungen eines beliebigen Körpers und schuf damit die Grundlagen für die modernen Entwicklungen. Weiter sind die Arbeiten von *Dickson* zu nennen und schließlich die wichtigen Beiträge und Anregungen, durch die *E. Noether* die Theorie gefördert hat. Für eine genaue Darstellung der historischen Entwicklung und für Angaben über die ältere Literatur sei auf den Cartanschen Enzyklopädieartikel sowie auf *J. A. Schouten*, Math. Ann. 76, 1, 1915 verwiesen.[1]

2. **Ringe und Algebren.** Unter einem *Ring* A verstehen wir hier ein System von Elementen, für die eine Addition und eine Multiplikation definiert sind, derart daß die folgenden Regeln gelten :

I. *Die Elemente von A bilden bei Addition eine Abelsche Gruppe, d. h.*

Ia. $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$, Ib. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ *für alle* α, β, γ *in* A.

Ic. *Es gibt ein Element* 0 *in* A, *für das* $\alpha+0=\alpha$ *für alle* α *gilt.*

Id. *Zu jedem* α *aus* A *gehört eine* $-\alpha$ *in* A *mit* $\alpha+(-\alpha)=0$.

II. *Das Produkt zweier Elemente von* A *ist wieder ein Element von* A, *und für* α, β, γ *in* A *gilt*

IIa. $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$, IIb. $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, IIc. $(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$.

Dabei werden Systeme A, die nur aus dem Element 0 bestehen, in der Regel ausgeschlossen. Wir verlangen nicht die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes $\alpha\beta=\beta\alpha$. Die Gesamtheit Z der Elemente ζ von A, für die $\alpha\zeta=\zeta\alpha$ für alle α aus A gilt, heißt das *Zentrum* von A. Gibt es ein Element ε, für das $\alpha\varepsilon=\varepsilon\alpha=\alpha$ für all α gilt, so ist ε eindeutig bestimmt und wird als das 1-*Element* 1 bezeichnet. Die assoziativen Gesetze erlauben die Einführung von Summen und Produkten von k Größen, ferner von Potenzen α^k. Für $\alpha+(-\beta)$ schreibt man $\alpha-\beta$.

Wir betrachten auch den Fall, daß für A ein System K von *Operatoren* gegeben ist, derart daß das Produkt jedes t aus K mit jedem α aus A als Größe von A definiert ist und die Regeln gelten (t in K, α, β in A)

IIIa. $t(\alpha+\beta)=t\alpha+t\beta$, IIIb. $t(\alpha\beta)=(t\alpha)\beta=\alpha(t\beta)$.

Unter einem *System hyperkomplexer Größen* order einer *Algebra* über

1) Hier sei nur erwähnt: *W. R. Hamilton*, Lectures on quaternions, Dublin 1853. *A. Cayley*, Philos. Trans. R. Soc. London **148**, 17, 1858. *H. Graßmann*, Die lineare Ausdehnungslehre, Leipzig 1844 und Berlin 1862. *W. K. Clifford*, Amer. J. Math. **1**, 350, 1878. *B. Peirce*, Amer. J. Math. **4**, 97, 1881. *R. Dedekind*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1885, 141 und 1887, 1. *L. Kronecker*, S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1888, 429, 447, 557, 595, 983. *E. Study*, Mh. Math. Phys. **1**, 283, 1890. *G. Scheffers*, Math. Ann. **39**, 324, 1891; **41**, 601, 1893. *Th. Molien*, Math. Ann. **41**, 83, 1893. *E. Cartan*, Annales Toulouse **12** B, 1, 1898. *G. Frobenius*, S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1903, 504 und 634.

einem gegebenen Grundkörper K[2] versteht man einen Ring A, der den Körper K als Operatorenbereich besitzt, falls außer IIIa und b die weiteren Gesetze gelten (s, t in K, α in A)

IIIc. $(s+t)\alpha = s\alpha + t\alpha$, IIId. $s(t\alpha) = (st)\alpha$, IIIe. $1\alpha = \alpha$,
wo 1 das Einselement von K ist. Man setzt $\alpha \cdot t = t \cdot \alpha$. Ohne Gefahr einer Verwechslung können wir das Nullelement 0 von A mit demselben Symbol wie das Nullelement von K bezeichnen. Jedes Produkt verschwindet, in dem ein Faktor 0 ist. Enthält A ein *1-Element* 1, so können wir ohne Gefahr $t \cdot 1$ mit dem Element t von K identifizieren, also K als Teilsystem von A ansehen.

Eine Algebra A über K heißt von *endlicher Ordnung*, wenn gilt

IV. *Es gibt eine natürliche Zahl n, sodaß für je $n+1$ Größen α_0, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ aus A eine Gleichung $h_0\alpha_0 + h_1\alpha_1 + \dots + h_n\alpha_n = 0$ mit nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten $h_0, h_1, \dots, h_n$ aus K besteht.*

Die kleinste hier mögliche Zahl n heißt die *Ordnung* order wie wir hier sagen wollen, der (lineare) *Rang* von A.[3]

3. Erläuterungen. Folgerungen aus den Definitionen. Die Gesetze I, IIIa, c, d, e und IV in Nr. 2 drücken aus, daß eine Algebra A der Ordnung n über K einen n-dimensionalen Vektorraum order Vektormodul über K darstellt (I B 2 (*Henke*)). Es gibt also eine Basis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ in A derart daß man jedes Element α von A eindeutig in der Form darstellen kann:

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n, \quad a_\nu \text{ in } K. \tag{1}$$

Jedem α entspricht so nach fester Wahl der Basis ein Vektor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ aus K; man erhält eine geometrische Deutung der hyperkomplexen Größen durch n-dimensionale Vektoren. Das prinzipiell Neue ist in unserm Fall die Existenz einer Multiplikation der Vektoren.

Die Produkte $\varepsilon_\kappa\varepsilon_\lambda$ müssen eine Darstellung (1) besitzen

$$\varepsilon_\kappa\varepsilon_\lambda = \sum_\mu c_{\kappa\lambda\mu}\varepsilon_\mu \qquad (\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

2) Während wir unter einem Ring einen "*nichtkommutativen*" *Ring* verstehen, gebrauchen wir das Wort Körper durchgehend für *kommutative Körper*. Für nichtkommutative Körper verwenden wir die Bezeichnung "Sciefkörper" s. Nr. 13.

3) Vergl. *L. E. Dickson*, Trans. Amer. Math. Soc. **4**, 21, 1903. Untersuchungen über die Unabhängigkeit der Axiome finden sich bei *K. Yoneyama*, Tôhoku Math. J. **31**, 332, 1929. Zur Definition von Algebren vgl. ferner *J. W. Young*, Ann. Math. (2) **29**, 47, 1929; *L. E. Bush*, Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 142, 1932; *L. Okunew*, Rec. Math. Moscou **40**, 410, 1933.

wo die n^3 *Zusammensetzungsgrößen* $c_{\kappa\lambda\mu}$ von A zu K gehören. Diese genügen den mit $(\varepsilon_\kappa\varepsilon_\lambda)\varepsilon_\nu = \varepsilon_\kappa(\varepsilon_\lambda\varepsilon_\nu)$ äquivalenten Assoziativitätsbedingungen

$$(3) \qquad \sum_\mu c_{\kappa\lambda\mu}c_{\mu\nu\rho} = \sum_\mu c_{\kappa\mu\rho}c_{\lambda\nu\mu} \qquad (\kappa,\ \lambda,\ \nu,\ \rho = 1, 2, \ldots, n).$$

Für das Produkt zweier Größen α und β aus A gilt dann

$$(4) \qquad \sum a_\kappa\varepsilon_\kappa \cdot \sum b_\lambda\varepsilon_\lambda = \sum_\mu \varepsilon_\mu \sum_{\kappa,\lambda} a_\kappa b_\lambda c_{\kappa\lambda\mu}.$$

Ist umgekehrt (3) für n^3 Größen $c_{\kappa\lambda\mu}$ aus K erfüllt und definiert man die Multiplikation der Vektoren (1) durch (4), so erhält man eine Algebra.

Bei Übergang zu einer neuen Basis erleiden die Komponenten $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in (1) eine feste nichtsinguläre lineare Transformation; $c_{\kappa\lambda\mu}$ verhält sich wie ein Tensor mit κ und λ also kovarianten Indizes und μ als kontravariantem Index[4].

4. Beispiele von Algebren. In Nr. 4 bezeichne K einen Körper.

1) Ist A Erweiterungskörper n-ten Grades über K, so ist A eine Algebra vom Rang n in bezug auf K als Grundkörpr.

2) Das System aller Matrizen eines festen Grades m mit Koeffizienten aus K bildet eine Algebra K_m, die *volle Matrixalgebra m-ten Grades* über K.

3) Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der Ordnung n mit den Elementen G_1, $G_2, \ldots, G_n$. Man betrachte n Basiselemente ε_ν. Ist $G_\kappa G_\lambda = G_\nu$, so setze man $\varepsilon_\kappa\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\nu$, vergl. (2). Man erhält eine Algebra vom Rang n, den *Gruppenring* von $\mathfrak{G}$ über K.[5]

4) Man definiere eine Algebra A mit vier Basiselementen $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = i$, $\varepsilon_3 = j$, $\varepsilon_4 = k$ durch

$$(5) \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Die hyperkomplexen Zahlen $\alpha = a + bi + cj + dk$ heißen die *Quaternionen* (s. [1]).

Das Quaternion $\alpha' = a - bi - cj - dk$ heißt *konjugiert* zu α. Für zwei Quaternionen α und β und für t in K ist dann

$$(6) \qquad (\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta', \quad (\alpha\beta)' = \beta'\alpha', \quad (t\alpha)' = t\alpha'.$$

---

4) Aus den $c_{\kappa\lambda\mu}$ gebildete Invarianten (bezüglich Basistransformation) werden untersucht von *O. C. Hazlett*, Ann. Math. (2) **16**, 1, 1914; **18**, 81, 1916; Amer. J. Math. **38**, 109, 1916; Trans. Amer. Math. Soc. **19**, 408, 1918; *C. C. MacDuffee*, Trans. Amer. Math. Soc. **23**, 135, 1922; **26**, 124, 1925.

5) *A. Cayley*, Philos. Mag. London (4) **7**, 40, 1854.

Das Produkt $\alpha\alpha'$, die Norm $N(\alpha)$ von α, liegt in K. Es gilt

$$(7) \qquad N(\alpha) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \qquad N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta).$$

Ist $N(\alpha) \neq 0$, so erfüllt $\alpha^{-1} = \frac{1}{N(\alpha)}\alpha'$, die Gleichung $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$. Dan haben $\alpha\xi = \beta$ und $\eta\alpha = \beta$ im Bereich der Quaternionen die eindeutigen Lösungen $\xi = \alpha^{-1}\beta$ bezw. $\eta = \beta\alpha^{-1}$.

Verschwindet in K eine Summe von vier Quadraten nur, wenn alle Quadrate Null sind, so ist $N(\alpha) \neq 0$ für $\alpha \neq 0$. Dann hat also jedes $\alpha \neq 0$ ein Inverses α^{-1}. Dies gilt insbesondere, wenn K ein reeller Körper ist.

Für weitere Einzelheiten über Quaternionen und geometrische Anwendungen vergl. III AB 11 (*Rothe*).

5. Die regulären Darstellungen einer Algebra. Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die Basiselemente einer Algebra A vom Rang n über dem Körper K, so gelten für ein beliebiges Element α aus A Gleichungen der Form

$$(8) \qquad \varepsilon_\kappa\alpha = \sum_\lambda r_{\kappa\lambda}(\alpha)\varepsilon_\lambda \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots, n)$$

mit Koeffizienten $r_{\kappa\lambda}(\alpha)$ aus K. Die Matrizen $R(\alpha) = (r_{\kappa\lambda}(\alpha))$ bilden eine *Darstellung* von A, d. h. für α und β aus A und t aus K gilt

$$(9) \qquad R(\alpha+\beta) = R(\alpha) + R(\beta), \quad R(\alpha\beta) = R(\alpha)\, R(\beta), \quad R(t\alpha) = tR(\alpha).$$

Anders ausgedrückt: Durch $\alpha \to R(\alpha)$ wird A homomorph (Nr. **6**) auf einen Matrizenring abgebildet. Gilt für kein $\alpha \neq 0$ die Gleichung $\alpha\xi = 0$ für alle ξ aus A, so ist die Darstellung *einstufig*, d. h. die Zuordnung ein Isomorphismus. Analog zu (8) sei

$$(10) \qquad \alpha\varepsilon_\lambda = \sum_\kappa s_{\kappa\lambda}(\alpha)\,\varepsilon_\kappa\,.$$

Dann bilden auch die Matrizen $S(\alpha) = (s_{\kappa\lambda}(\alpha))$ eine Darstellung von A. Man nennt $R(\alpha)$ und $S(\alpha)$ die beiden *regulären Darstellungen* von A.

Sind $c_{\kappa\lambda\mu}$ die Zusammensetzungsgrößen von A und ist $\alpha = \sum_\nu a_\nu\varepsilon_\nu$, so ist

$$r_{\kappa\lambda}(\alpha) = \sum_\nu c_{\kappa\nu\lambda}a_\nu, \qquad s_{\kappa\lambda}(\alpha) = \sum_\nu c_{\nu\lambda\kappa}a_\nu\,.$$

Elemente $\zeta = \sum z_\nu\varepsilon_\nu$ des Zentrum von A sind durch $R(\zeta) = S(\zeta)$ gekennzeichnet; man erhält daraus lineare homogene Gleichungen für die z_ν.

Die beiden Determinanten $|R(\alpha)| = N_1(\alpha)$ und $|S(\alpha)| = N_2(\alpha)$ heißen die beiden *Normen* von α, es ist $N_\lambda(\alpha\beta) = N_\lambda(\alpha)N_\lambda(\beta)$ für $\lambda = 1, 2$. Ist

$\gamma = \sum c_\nu \varepsilon_\nu$ in A gegeben, und soll $\xi = \sum x_\nu \varepsilon_\nu$ aus der Gleichung $\xi\alpha = \gamma$ bestimmt werden, so hat man die linearen Gleichungen

$$c_\lambda = \sum_\kappa x_\kappa r_{\kappa\lambda}(\alpha)$$

für die x_κ aufzulösen. Ist $N_1(\alpha) = 0$, so ist α ein *Rechtsnullteiler*, d. h. das Proukt $\xi\alpha$ verschwindet für ein $\xi \neq 0$. Dagegen hat im Fall $N_1(\alpha) \neq 0$ die Gleichung $\xi\alpha = \gamma$ genau eine Lösung ξ. Ist nicht jedes α ein Rechtsnullteiler, so gibt es ein *rechtsseitiges* 1-*Element* ε, für das $\xi\varepsilon = \xi$ für alle ξ aus A gilt. Analoge Betrachtungen gelten für die Gleichung $\alpha\xi = \beta$, wenn man N_2 anstelle von N_1 verwendet und überall rechts und links vertauscht.

Algebren mit 1-Element sind dadurch charakterisiert, daß weder $N_1(\alpha)$ noch $N_2(\alpha)$ für alle α verschwindet. Jeder Rechtsnullteiler ist dann Linksnullteiler und umgekehrt. Ist α nicht Nullteiler, so gibt es ein α^{-1} mit $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$. Sowohl $R(\alpha)$ wie $S(\alpha)$ sind dann einstufig[6]. Es braucht nicht $N_1(\alpha) = N_2(\alpha)$ zu sein.

Es sei E die Einheitsmatrix. Die characteristischen Polynome

$$(11) \qquad \begin{aligned} f_1(x) &= | xE - R(\alpha) | = x^n - \sigma_1(\alpha)x^{n-1} + \dots + (-1)^n N_1(\alpha), \\ f_2(x) &= | xE - S(\alpha) | = x^n - \sigma_2(\alpha)x^{n-1} + \dots + (-1)^n N_2(\alpha) \end{aligned}$$

von $R(\alpha)$ und $S(\alpha)$ heißen die *charakteristischen Polynome* von α, sie sind unabhängig von der speziellen Wahl der Basis ε_ν. Die Koeffizienten sind homogene Polynome der Komponenten a_ν von α. Insbesondere sind $\sigma_1(\alpha)$ und $\sigma_2(\alpha)$, die beiden *Spuren* von α, lineare Fuktionen der a_ν.

Hat A 1-Element, so gilt nach I B 2 (*Henke*)

$$(12) \qquad f_1(\alpha) = 0, \qquad f_2(\alpha) = 0.$$

Es ist also α Wurzel von Gleichungen n-ten Grades mit Koeffizienten aus K. Man kann auch leicht die Gleichung niedrigsten Grades mit Koeffizienten aus K aufstellen, der α genügt. Ersetzt man die Komponenten a_ν von α durch Unbestimmte, so wird das Polynom niedrigsten Grades, das für $x = \alpha$ verschwindet, als das *Gradpolynom* $f(x)$ der Algebra bezeichnet; es ist ein Teiler von $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die Koeffizienten sind Polynome in den Unbestimmten a_ν. $f(x)$ heißt auch die *Hauptgleichung* von A.

Ein Algebra A ohne 1-Element ist in Algebra $\bar{A}$ mit 1-Element als Unteralgebra enthalten. Die regulären Darstellungen von $\bar{A}$ liefern einstufige Darstellungen von A. Darstellungen von Algebren werden

6) Für Einstufigkeit von $R(\alpha)$ und $S(\alpha)$ in andern Fällen vgl. *R. Brauer*.

allgemein in 14 (*Deuring*) behandelt[7].

6. Isomorphe und homomorphe Ringe. Wir betrachten Abbildungen eines Ringes A auf einen Ring A^* mit demselben Operatorenbereich K, bei denen jedes Element von A^* als Bildelement auftritt. Eine solche Abbildung $\alpha \to \alpha^*$ heißt ein *Homomorphismus*, wenn für alle α, β aus A und t aus K die Beziehungen

$$(13a)\quad (\alpha+\beta)^* = \alpha^* + \beta^*, \qquad (13b)\quad (\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*, \qquad (13c)\quad (t\alpha)^* = t\alpha^*$$

gelten. Ist die Abbildung außerdem eineindeutig, so nennt man sie einen *Isomorphismus*. Unter einem *Automorphismus* von A versteht man eine isomorphe Abbildung von A auf sich selbst.

Gibt es eine Isomorphismus von A auf A^*, so heißen A und A^* *isomorph*, $A \cong A^*$. Isomorphe Ringe gelten häufig als nicht wesentlich verschieden.

Gibt es schließlich eine eineindeutige Abbildung von A auf A^*, bei der (13a) und (13c) gelten, während anstelle von (13b) die Beziehung $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$ tritt, so nennt man A und A^* *reziprok-isomorph*. Zu jedem A gibt es reziprok-isomorphe Ringe und alle diese sind untereinander isomorph. Wir wenden alle diese Bezeichnungen insbesondere an, wenn A und A^* Algebren über demselben Grundkörper K sind.

7. Moduln, Teilringe und Ideale. Es sei A ein Ring mit einem (eventuell auch leeren) Operatorenbereich K, speziell eine Algebra über einem körper K. Ein *Modul* in A ist eine Teilmenge M von A, die mit α und β stets $t_1\alpha + t_2\beta$ für alle t_1, t_2 aus K enthält. Faßt man A als Gruppe mit Addition als Gruppenverknüpfung und K als Operatorenbereich auf, so handelt es sich dabei gerade um die zulässigen Untergruppen von A, vergl. hierzu und zu dem folgenden I B 4 (*Magnus*), I B 6 (*Krull*). Wir schreiben $M = 0$, wenn M nur das Nullelement enthält.

Die *Summe* $S = (M_1, M_2, \ldots, M_l)$ von Moduln M_λ ist der Modul, der aus den Elementen besteht, die in der Form $\sigma = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_l$ mit μ_λ in M_λ darstellbar sind. Ist für jedes solche σ diese Darstellung nur auf eine Weise möglich, so heißt S *direkte Summe* $M_1 + M_2 + \ldots + M_l$ der M_λ. Als *Produkt* $B \cdot C$ zweier beliebiger Teilmengen B und C von A bezeichnet

7) Weitere Resultate über reguläre Darstellungen: *Molien*[1], *Cartan*[1], *Frobenius*[1], ferner *C. C. MacDuffee*, Bull. Amer. Math. Soc. **35**, 344, 1929; *H. Schwerdtfeger*, C. R. Acad. Sci. Paris **199**, 508, 1934; *R. Brauer* und *C. Nesbitt*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **23**, 236, 1937.

man den kleinsten alle Produkt $\beta\gamma$ (β in B, γ in C) enthaltenden Modul. Die Summenbildung ist assoziativ und kommutativ, die Produktbildung assoziativ, und es gelten die distributiven Gesetze $(M_1, M_2)\cdot B=(M_1B, M_2B)$, $B(M_1, M_2) = (BM_1, BM_2)$.

Eine Teilmenge B von A, die bei Verwendung der in A gegebenen Verknüpfungsoperationen selbst einen Ring mit K als Operatorenbereich bildet, heißt *Teilring* bezw. *Teilalgebra*. Teilringe sind also Moduln B, für die $B\cdot B \subseteqq B$ gilt[8].

Ein *Ideal* orer *invarianter Teilring* (bezw. *invariante Teilalgebra*) ist ein Modul B, der mit β auch $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ für all α aus A enthält, für den also $AB \subseteqq B$ und $BA \subseteqq B$ gilt.

Ist B ein Ideal von A und bezeichnet $\langle\alpha\rangle$ die das Element α von A enthaltende Restklasse mod B (d. h. die Gesamtheit aller $\alpha+\eta$ mit η in B), so definiert man

$$(14) \qquad \langle\alpha\rangle+\langle\beta\rangle=\langle\alpha+\beta\rangle,\ \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle=\langle\alpha\beta\rangle,\ t\langle\alpha\rangle=\langle t\alpha\rangle$$

für α, β in A, t in K. Dann bilden die Restklassen $\langle\alpha\rangle$ selbst einen Ring A/B mit K als Operatorenbereich (manchmal auch mit $A-B$ bezeichnet). A/B heißt der *Restklassenring* von A (mod B), (bezw. *Restklassenalgebra*, auch *Quotientenalgebra* order *Differenzalgebra*). Es ist A/B zu A homomorph. Umgekehrt ist jeder zu A homomorphe Ring A^* isomorph zu A/B, wo das Ideal B aus denjenigen β von A besteht, denen in A^* das Nullelement zugeordnet ist. Auch weitere gruppentheoretische Sätze lassen sich übertragen, z. B. gilt ein Analogon des Jordan-Hölder-Schreierschen Satzes (I B 4 (*Magnus*)) für Ketten $A\supset A_1\supset A_2\supset\ldots\supset A_l=0$, bei denen A_λ Ideal in $A_{\lambda-1}$ ist.

Unter einem *Rechtsideal* versteht man einen Modul R, für den $RA\subseteqq R$ gilt, unter einem *Linksideal* einen Modul L, für den $AL\subseteqq L$ ist. Ist B gleichzeitig Links- und Rechtsideal, so ist es ein Ideal. Summen- und Durchschnittsbildung von Rechtsidealen ergibt wieder Rechtsideale, analoges gilt für Linksideale. Ist R ein Rechtsideal, B eine beliebige Teilmenge von A, so ist auch BR ein Rechtsideal. Ebenso ist BL Linksideal, wenn L ein Linksideal ist[9].

8. Idempotente und nilpotente Elemente. Ein Element $\varepsilon\neq 0$ eines

---

8) Elemente von A, die bei Multiplikation eine Gruppe bilden, werden untersucht in *A. Ranum*, Amer. J. Math. **49**, 285, 1927.

9) Für die Eigenschaft der Rechtsideale einen Verband (lattice, structure) zu bilden und Folgerungen daraus vgl. *G. Birkhoff*, Proc. Cambridge Phylos. Soc. **29**, 441, 1933; *O. Ore*, Ann. Math. (2) **36**, 406, 1935; **37**, 265, 1936.

Ringes A heißt ein *Idempotent*, wenn $\varepsilon^2 = \varepsilon$ gilt ; ein Element ν heißt nilpotent, wenn eine Potenz ν^k verschwindet. Idempotente ε können dazu verwendet werden, um Darstellungen von A als direkte Summen zu erhalten. Setzt man

$$\alpha = \varepsilon\alpha + (\alpha - \varepsilon\alpha)\,, \tag{15}$$

so liegt $\varepsilon\alpha$ im Rechtsideal εA und $\alpha - \varepsilon\alpha$ im Rechtsideal R, das aus allen ξ aus A besteht, für die $\varepsilon\xi = 0$ gilt. Es ist A direkte Summe $A = \varepsilon A + R$. Analog ist $A = A\varepsilon + L$, wo L Linksideal mit $L\varepsilon = 0$ ist. Man setze weiter

$$\alpha = \varepsilon\alpha\varepsilon + \varepsilon(\alpha - \alpha\varepsilon) + (\alpha - \varepsilon\alpha)\varepsilon + (\alpha - \varepsilon\alpha - \alpha\varepsilon + \varepsilon\alpha\varepsilon) = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4. \tag{16}$$

Durchläuft α den Ring A, so durchläuft τ_ν einen Teilring T_ν, $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ und zwar sind diese Ringe durch die folgenden Gleichungen charakterisiert

$$T_1 : \varepsilon\tau_1 = \tau_1\varepsilon = \tau_1 \quad ; \quad T_2 : \varepsilon\tau_2 = \tau_2,\ \tau_2\varepsilon = 0\ ;$$
$$T_3 : \varepsilon\tau_3 = 0,\ \tau_3\varepsilon = \tau_3 \ ; \quad T_4 : \varepsilon\tau_4 = \tau_4\varepsilon = 0. \quad .$$

Es ist A direkte Summe $A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$. Man bezeichnet (15) und (16) als die *Peirceschen Zerlegungen* von A.

Enthält A ein Ideal B, das als Ring betrachtet ein 1-*Element* ε *hat, so ist A direkte Summe von B und einem Ideal C.* Denn in (16) wird hier $T_2 = T_3 = 0$, und $T_4 = C$ ist dann ein Ideal.

Zur Konstruktion von Idempotenten wird der folgende wichtige Hilfssatz verwendet[10] : *Enthält ein Rechtsideal B nichtnilpotente Elemente β, während jedes eine echte Teilmenge von B bildende Rechtsideal nur aus nilpotenten Elementen besteht, so gibt es in B ein Idempotent ε, und es ist $B = \varepsilon A$.* Denn dann ist $\beta B = B$ und daher gibt es ein ξ in B mit $\beta\xi = \beta$, $\beta(\xi^2 - \xi) = 0$; ξ ist nicht nilpotent. Die ν in B, für die $\beta\nu = 0$ ist, bilden ein Rechtsideal $C \subset B$, sind also nilpotent. Dahere ist $(\xi^2 - \xi)^l = 0$ für geeignetes l. Es sei $g(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, für das $g(x) \equiv 0 \pmod{x^l}$, $g(x) \equiv 1 \pmod{(x-1)^l}$ ist. Dann ist $\varepsilon = g(\xi)$ ein Idempotent in B.

9. Die direkte Summe von Ringen. Wir behandeln eine erste Methode zur Bildung neuer Ringe aus gegebenen. Unser Ziel ist es,

10) *G. Köthe*, Math. Z. **32**, 161, 1930. Beweise für die Existenz von Idempotenten unter engeren Voraussetzungen findet man u. a. bei *B. Peirce*[1], *H. E. Hawkes*, Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 312, 1902, sowie in der in Nr. **11**, zitierten Literatur.

vorgelegte Ringe aus Ringen einfacherer Struktur aufzubauen.

Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Ringe mit demselben Operatorenbereich K. Man betrachte Symbole $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, wo α_μ ein beliebiges Element von A_μ ist. Zwei solche Symbole gelten nur als gleich, wenn entsprechende Komponenten gleich sind. Man definiere Rechenoperationen durch

$$\begin{aligned} &(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)+(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_m+\beta_m) \\ (17)\quad &(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)=(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_m\beta_m) \\ &t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)=(t\alpha_1, t\alpha_2, \ldots, t\alpha_m). \end{aligned}$$

für α_μ, β_μ, in A_μ und t in K. Dann bilden die Symbole einen Ring A mit K als Operatorenbereich, der die *direkte Summe* $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_m$ heißt. Sieht man isomorphe Ringe als nicht verschieden an, so ist die direkte Addition kommutativ und assoziativ. Ein Ring heißt *unzerlegbar*, wenn er nicht zu einer direkten Summe $A_1 \oplus A_2$ isomorph ist.

Die Elemente von A, bei denen höchstens die μ-te Komponente α_μ von 0 verschieden ist, bilden ein zu A_μ isomorphes Ideal B_μ in A, und A ist im Sinn von Nr. 7 direkte Summe der B_μ. Ist umgekehrt ein Ring A im Sinn von Nr. 7 direkte Summe von *Idealen* $B_1, B_2, \ldots, B_m$, so haben B_μ und B_ν für $\mu \neq \nu$ nur das Element 0 gemeinsam. Dann ist $B_\mu B_\nu = 0$, da $B_\mu B_\nu$ in B_μ und B_ν liegt. Daraus folgt, daß A zu $B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_m$ isomorph ist. Dies rechtfertigt die Bezeichnung "direke Summe" für die Operation $\oplus$.

Das Zentrum von $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots A_m$ ist die direkte Summe der Zentren der A_μ. Umgekehrt sei A ein Ring mit 1-Element 1, dessen Zentrum Z als direkte Summe von Idealen Z_μ von Z dargestellt sei, $Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_m$. Ist $1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_m$ die zugehörige Darstellung von 1, so ist $A\zeta_\mu$ ein Ideal von A und $A = A\zeta_1 + A\zeta_2 + \ldots + A\zeta_m$, also $A \cong A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_m$ mit $A_\mu \cong A\zeta_\mu$.

Erhält $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots A_m$ ein 1-Element, so ist jedes Ideal (Rechtsideal) von A direkte Summe von Idealen (Rechtsidealen) von A. Sind dann die A_μ unzerlegbar, so sind sie eindeutig durch A bestimmt.

10. Das direkte Produkt von Algebren. Wir behandeln im Fall von Algebren eine weitere Methode zur Bildung neuer Algebren aus gegebenen. Es sei A eine Algebra von endlicher Ordnung mit der Basis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ über dem Grundkörper K. Es sei B eine beliebige Algebra über K, doch wollen wir zunächst annehmen, daß A und B höchstens Elemente aus K gemeinsam haben. Wir gehen wie in Nr. 3 vor. Wir betrachten Symbole

$$\rho = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 + \ldots + \beta_n \varepsilon_n$$

wo die β_ν jetzt aber beliebige Elemente aus B sind. Wir rechnen mit diesen ρ ganz entsprechend wie mit den Größen (1). Jedes β_μ wird mit jedem ε_ν als vertauschbar angesehen. Analog zu (4) gilt also, wenn $c_{\kappa\lambda\mu}$ die Zusammensetzungsgrößen der ε_κ sind,

$$\sum_\kappa \beta_\kappa \varepsilon_\kappa \cdot \sum_\lambda \beta_\lambda^* \varepsilon_\lambda = \sum_\mu \left(\sum_{\kappa,\lambda} \beta_\kappa \beta_\lambda^* c_{\kappa\lambda\mu}\right) \varepsilon_\mu . \tag{18}$$

Der Koeffizient von ε_μ ist wieder eine Größe aus B. Man erhält so eine Algebra, die als das *direkte Produkt* $A \times B$ bezeichnet wird. $A \times B$ ist unabhängig von der Auswahl der Basis in A.

Man kann das direkte Produkt auch einführen, wenn A und B beide unendlichen linearen Rang haben[11]. Haben ferner A und B auch außerhalb von K liegende Elemente gemeinsam, so ersetzen wir B durch eine geeignete isomorphe Algebra $\bar{B}$ und bilden $A \times \bar{B}$. Unter $A \times B$ verstehen wir irgend eine zu $A \times \bar{B}$ isomorphe Algebra; wir betrachten in diesem Zusammenhang isomorphe Algebren als gleich. Die direkte Multiplikation von Algebren ist dann assoziativ, kommutativ und in Verbindung mit der direkten Addition distributiv.

Ist speziell $B = \Omega$ ein Erweiterungskörper von K, so kann man $A \times \Omega$ als Algebra über Ω auffassen. Diese Algebra hat dieselbe Basis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ und dieselben Zusammensetzungsgrößen $c_{\kappa\lambda\mu}$ wie A. Man schreibt dann auch A_Ω für $A \times \Omega$.

Das Zentrum von $A \times B$ ist das direkte Produkt der Zentren von A und B.

Ist auch B eine Algebra mit endlicher Basis $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, und sind $d_{\rho\sigma\tau}$ die zugehörigen Zusammensetzungsgrößen, so kann man auch $A \times B$ als Algebra mit den nr Basiselementen $\varepsilon_\nu \eta_\rho$ definieren. Die Produktformeln sind

$$(\varepsilon_\kappa \eta_\rho)(\varepsilon_\lambda \eta_\sigma) = \sum_{\mu,\tau} c_{\kappa\lambda\mu} d_{\rho\sigma\tau} (\varepsilon_\mu \eta_\tau). \tag{19}$$

A und B mögen 1-Elemente besitzen. Dann enthält $P = A \times B$ Teilalgebren $\bar{A}$ und $\bar{B}$ mit $\bar{A} \cong A$, $\bar{B} \cong B$, es ist $P = \bar{A}\bar{B}$ und jedes Element von $\bar{A}$ ist mit jedem Element von $\bar{B}$ vertauschbar. Haben A und B endliche Ränge n bezw. r, so ist umgekehrt jede Algebra P von Rang nr mit diesen Eigenschaften zu $A \times B$ isomorph.

B. Die Strukturtheorie

11. Die Maximal- und Minimalbedingung. Die Strukturtheorie

11) *J. L. Dorroh*, Ann. Math. (2) **36**, 882, 1934.

wurde von *J. H. M. Wedderburn*[12] ursprünglich für Algebren endlichen Ranges entwickelt; später[13] übertrug er sie auf gewisse Algebren unendlichen Ranges[14]. Hier soll im Anschluß an *E. Artin*[15] und *G. Köthe*[16] die Theorie für Ringe A dargestellt werden, die eine gleich zu definierende Maximal- und Minimalbedingung erfüllen[17].

In einer Menge S von Rechtsidealen heißt ein Rechtsideal B *minimal*, wenn es kein Rechtsideal von S als echte Teilmenge enthält. Analog heißt B *maximal*, wenn es in keinem Rechtsideal von S als echter Teil enthalten ist. Dann fordern wir

I. *Jede Menge von Rechtsidealen enthält ein minimales Rechtsideal.*

Die entsprechende Maximalbedingung kann durch eine etwas weniger besagende Forderung ersetzt werden. Eine Teilmenge B eines Ringes A heißt *nilpotent*, wenn im Sinn der Multiplikation von Nr. **7** eine Potenz $B^l = 0$ ist. Dann fordern wir weiter:

II. *Unter den nilpotenten Idealen von A gibt es ein maximales Ideal.*

Für Algebren endlicher Ordnung sind die Bedingungen I. und II. erfüllt. Aus I. folgt, daß der Ring A zu einer direkte Summe unzerlegbarer Ringe (Nr. **9**) isomorph ist.

H. Fitting[18] hat gezeigt, daß die Theorie für die Automorphismenringe einer Abelschen Gruppe gilt, für deren Uutergruppen eine Maximal- und Minmalbedingung besteht. Bei Beschränkung auf normale Automorphismen behandelt Fitting auch nichtabelsche Gruppen. Hier handelt es sich um gewisse verallgemeinerte Ringe, in denen die Addition nicht unbeschränkt ausführbar ist.

12. Das Radikal. Halbeinfache Ringe. Es sei A ein Ring, der die Maximal- und Minimalbedingung I. und II. (Nr. **11**) erfüllt. Ein maximales nilpotentes Ideal N enthält alle nilpotenten Rechts- und Linksideale von

12) Proc. London Math. Scc. (2) **6**, 77, 1908.

13) Trans. Amer. Math. Scc. **26**, 395, 1924.

14) Algebren unendlicher Ordnung werden auch noch behandelt bei *M. H. Ingraham*, Bull. Amer. Math. Scc. **38**, 100, 1932; *H. H. Conwell*, Bull, Amer. Math. Scc. **40**, 95, 1934.

15) Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **5**, 251, 1927; ferner *E. Noether*, Math. Z. **30**, 641, 1929.

16) Math. Z. **32**, 161, 1930, vgl. ferner *M. Deuring*, Algebren, Berlin 1935. Die Voraussetzungen hier sind noch etwas weiter als bei uns, s. auch[6]. Für einen noch allgemeineren Fall s. *G. Köthe*, Math. Ann. **103**, 545, 1930.

17) Außer den in Nr. **11** zitierten Abhandlungen vgl. man für die Beweise der Sätze der Strukturtheorie *G. Scorca*, Corpi numerici e algebre, Messina 1921; *L. E. Dickson*, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927; *B. L. van der Waerden*, Moderne Algebra Bd. 2; *J. H. Wedderburn*, Lectures on matrices, New york 1934; *R. Brauer*, Math. Z. **30**, 79, 1929; *H. Weyl*, Ann. Math. (2) **37**, 709, 1936.

A und ist daher eindeutig bestimmt. N heißt das *Radikal* von A.

Jedes nichtnilpotente Rechtsideal B enthält ein Idempotent[10]. Es genügt dies für minimale nichtnilpotente B zu beweisen. Hier gibt es ein β in B, für das $\beta B = B$ ist; denn andernfalls wäre βB stets nilpotent, $\beta B \subseteqq N$, also $B^2 \subseteqq N$, und B wäre nilpotent. Dann ist β nicht nilpotent, die Behauptung folgt aus Nr. 8.

Die Größen ν von N, die sogenannten *Wurzelgrößen* (*eigentlich nilpotenten Größen*), sind dadurch charakterisiert, daß $\nu\alpha$ für alle α aus A nilpotent ist; denn dann kommt in dem kleinsten ν enthaltenden Rechtsideal R kein Idempotent vor; R ist also nilpotent.

Ein Ring heißt *halbeinfach* (oder ein *Dedekindscher Ring*), wenn sein Radikal nur aus 0 besteht. *Ist ein Ring A von seinem Radikal N verschieden, so ist A/N halbeinfach.*

Das Radikal einer direkten Summe $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_m$ ist die direkte Summe der Radikale der A_μ. Insbesondere ist A halbeinfach, wenn alle A_μ halbeinfach sind.

Ein nur aus nilpotenten Elementen bestehender Teilring eines Ringes A ist selbst nilpotent[19].

Nach *J. von Neumann*[20] kann man halbeinfache Ringe auch dadurch characterisieren, daß für jedes α aus A die Gleichung $\alpha\xi\alpha = \alpha$ eine Lösung ξ in A hat. *J. von Neumann* untersucht Ringe mit dieser Eigenschaft, die er *reguläre Ringe* nennt, auch im Fall, daß die Maximal- und Minimalbedingung nicht gelten. Die Rechtshauptideale bilden einen komplementären Verband (s. 11 (*Krull*)). Die Umkehrung gilt ebenfalls unter sehr weiten Voraussetzungen.

13. Die Struktursätze. Einfache Ringe und Schiefkörper. Wir betrachten weiterhin Ringe, die die Maximal- und Minimalbedingung (Nr. **11**) erfüllen. Die Grundlage für das folgende bildet der Hilfssatz (*Köthe*[16]): *Jedes Rechtsideal M eines Ringes A lässt sich als direkte Summe von Rechtsidealen darstellen*

$$M = \varepsilon_1 A + \varepsilon_2 A + \ldots + \varepsilon_r A + T. \tag{20}$$

Dabei sind die ε_ρ Idempotente mit $\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu = 0$ füri $\mu \neq \nu$ und $\varepsilon_\rho T = 0$. Das Rechtsideal T liegt im Radikal von A, und ebenso ist jedes in $\varepsilon_\rho A$ enthaltene Rechts ideal (außer $\varepsilon_\rho A$ selbst) nilpotent. Insbesondere gibt es eine Darstel-

18) Math. Ann. **107**, 514, 1932; **114**, 84, 355, 1937.

19) *J. Levitzki*, Math. Ann. **105**, 621, 1931. Für nilpotente Teilringe vgl. weiter *K. Shoda*, Math. Ann. **102**, 273, 1930; *G. Köthe*, Math. Ann. **103**, 359, 1930.

20) Proc. Nat. Acad. Sci. USA **22**, 707, 1936; **23**, 16, 341.

lung für $M = A$. ZUSATZ: *Enthält* M *als Ring ein* 1-*Element* η, *so ist* $T = 0$ *und* $\eta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_r$.

Beweis: Ist M nicht selbst nilpotent, so sei B ein minimales nichtnilpotentes Teilrechtsideal von M. B enthält nach Nr. **12** ein Idempotent ε_1, und es ist $B = \varepsilon_1 A$. Dann liefert (15) eine Darsellung $M = \varepsilon_1 A + R$ mit $\varepsilon_1 R = 0$. Ist R nicht nilpotent, so enthält es ebenso ein minimales nichtnilpotentes Ideal $\varepsilon_2' A$ mit $\varepsilon_2'^2 = \varepsilon_2'$. Setzt man $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' - \varepsilon_2'\varepsilon_1$, so ist $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2$ und $\varepsilon_2 A \subseteq \varepsilon_2' A$, also $\varepsilon_2 A = \varepsilon_2' A$. Dann gilt $M = \varepsilon_1 A + \varepsilon_2 A + R_2$, wo R_2 ein Rechtsideal mit $\varepsilon_1 R_2 = \varepsilon_2 R_2 = 0$ ist. So kann man fortsetzen; das Verfahren bricht ab.

Ein halbeinfacher Ring heißt *einfach*, wenn er kein Ideal (außer sich und 0) enthält.

1. WEDDERBURNSCHER STRUKTURSATZ: [12] *Ein halbeinfacher Ring* A *enthält ein* 1-*Element. Er besitzt eine Darstellung* $A \cong A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_m$ *als direkte Summe einfacher Ringe. Die zu* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *isomorphen Ideale von* A *sind eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist* A *halbeinfach, wenn alle* A_μ *einfach sind.*

Beweis: Es sei M in (20) ein Ideal von A. Wegen der Halbeinfachheit von A ist $T = 0$ und daher $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_r$ linksseitiges 1-Element von M. Für μ in M ist dann $(\mu - \varepsilon\mu)M = 0$, $((\mu - \mu\varepsilon)A)^2 \subseteq (\mu - \mu\varepsilon)M = 0$. Als Wurzelgröße verschwindet $\mu - \mu\varepsilon$, d. h. ε ist 1-Element von M. Jetzt führen die Sätze von Nr. **8, 9, 12** zum Ziel.

Das Zentrum eines einfachen Ringes ist ein Körper. Daher ist das Zentrum eines halbeinfachen Ringes eine direkte Summe von Körpern; aus der zugehörigen Zerlegung von 1 erhält man nach Nr. **9** die Zerlegung von A in einfache Ringe.

Ein Ring heißt *Schiefkörper*, wenn er ein 1-Element enthält, und es zu jedem $\alpha \neq 0$ ein α^{-1} mit $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$ gibt. Jeder Ring, in dem 0 der einzige Nullteiler ist, ist ein Schiefkörper. Dies folgt mit Hilfe von (20) für $M = A$, die Maximal- und Minimalbedingung sind dabei wesentlich. Eine Algebra von endlicher Ordnung, die Schiefkörper ist, heißt auch *Divisionsalgebra*. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so gibt es keine Divisionsalgebra über K (außer K selbst). Jeder Schiefkörper A ist einfach. Gilt auch noch das kommutative Gesetz der Multiplikation, so ist A ein Körper.

Der 1. Struktursatz führt halbeinfache Ringe auf einfache Ringe zurück. Einfache Ringe lassen sich jetzt weiter auf Schiefkörper zurückführen.

2. WEDDERBURNSCHER STRUKTURSATZ: [12] *Ein einfacher Ring* A *ist isomorph dem Ring* S_r *aller Matrizen eines festen Grades* r *mit Koeffizienten*

aus einem geeigneten Schiefkörper S. Dabei sind S (abgesehen von Innerer Isomorphie (s. Nr. 20) und r eindeutig durch A bestimmt[21]. *Umgekehrt ist jedes S_r einfach.*

Beweis: Man gehe wieder von (20) für $M = A$ aus. Es ist hier $A_{\kappa\lambda} = \varepsilon_\kappa A \varepsilon_\lambda \neq 0$. Für $\gamma_{\kappa 1} \neq 0$ aus $A_{\kappa 1}$ gilt $\gamma_{\kappa 1} A = \varepsilon_\kappa A$. Daher gibt es ein $\gamma_{1\kappa}$ in A und sogar in $A_{1\kappa}$ mit $\gamma_{\kappa 1}\gamma_{1\kappa} = \varepsilon_\kappa$; man setze $\gamma_{11} = \varepsilon_1$. Ordnet man dem Element α von A die Matrix $(\gamma_{1\kappa}\alpha\gamma_{\lambda 1}) = M(\alpha)$ zu, so erhält man die gewünschte Darstellung. Die Koeffizienten von $M(\alpha)$ liegen im Schiefkörper $S = \varepsilon_1 A \varepsilon_1$. Man fasse $\varepsilon_1 A$ als additive Gruppe auf, die außer den Operatoren von K auch alle Rechtsmultiplikationen mit festen Elementen von A als Operatoren besitzt. Dann kann S als Ring der Operatorautomorphismen von $\varepsilon_1 A$ definiert werden.

Die Zentren von A und S sind isomorph. Im Fall von Algebren von endlicher Ordnung kann der 2. Struktursatz so formuliert werden: Ein einfache Algebra ist dem direkte Produkt einer Divisionsalgebra mit einer vollen Matrixalgebra K_r (Nr. 4) isomorph.

14. Der allgemeine Struktursatz[22]. Unter einem *Kernring* verstehen wir einen Ring A mit Radikal N, für den A/N direkte Summe von Schiefkörpern (nicht nur von einfachen Ringen) ist. Die Elemente ε_ρ in (20) für $M = A$ liefern mod N die 1-Elemente dieser Schiefkörper; wir bezeichnen sie als ein *ausgezeichnetes System* von Idempotenten von A.

Dann gilt: *Jeder Ring C mit 1-Element, der die Maximal- und Minimalbedingung erfüllt, bestimmt einen Kernring A mit 1-Element (eindeutig bis auf Isomorphie) und ein System natürlicher Zahlen $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Die Anzahl r stimmt dabei mit der Anzahl der Idempotente in einem ausgezeichneten System $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ von Idempotenten von A überein. Bei geeigneter Numerierung ist A isomorph zum Ring aller Matrizen*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} \ldots M_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{r1} \ldots M_{rr} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

wo $M_{\kappa\lambda}$ eine Matrix mit f_κ Zeilen und f_λ Spalten ist, deren Koeffizienten im Teilring $\varepsilon_\kappa A \varepsilon_\lambda$ von A liegen. Je zwei derartige Matrizendarstellungen von C lassen sich durch einen inneren Automorphisms von A in einander überführen (s. Nr. 20).

Auch für nichtnilpotente Ringe C ohne 1-Element gibt es eine analoge

21) Diese Eindeutigkeitsaussage zuerst bei *G. Scorca*[17].

22) *H. Fitting*[18], ferner s. [6]. Für Algebren endlicher Ordnung über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen findet sich der Satz bei *Th. Molien*[1], *E. Cartan*[1].

Matrizendarstellung, wo dann der Kernring A auch kein 1-Element hat. Man hat zu den ε_ρ ein Symbol ε_{r+1} und dementsprechend in (21) eine weitere Zeile und Spalte hinzuzufügen. Dabei definiere man $\varepsilon_{r+1}\alpha = \alpha - \varepsilon_1\alpha - \ldots - \varepsilon_r\alpha$, $\alpha\varepsilon_{r+1} = \alpha - \alpha\varepsilon_1 - \ldots - \alpha\varepsilon_r$ und setze $f_{r+1} = 1$.

Ist C eine Algebra endlichen Ranges n, so bezeichnet man die Rangzahlen $c_{\kappa\lambda}$ von $\varepsilon_\kappa A \varepsilon_\lambda$ als die *Cartansche Invarianten* von C. Es ist dann

$$n = \sum_{\kappa,\lambda} c_{\kappa\lambda} f_\kappa f_\lambda.$$

Ein Ring A mit Radikal N heißt *Primär*, wenn A/N einfach ist; A heißt *vollprimär* wenn A/N Schiefkörper ist. Vollprimär, sind gerade diejenigen Ringe, die ein einziges Idempotent enthalten. Dan und nur dann ist ein Ring A mit 1-Element primär, wenn jedes Ideal B (außer $B = A$) nilpotent ist; dann und nur dann ist A vollprimär, wenn sogar jedes Rechtsideal R (außer $R = A$) nilpotent ist.

Der Spezialfall $r = 1$ des obigen Satzes ergibt: *Jeder primäre Ring A mit 1-Element ist einem vollen Matrizenring aus einem vollprimären Ring S mit 1-Element isomorph*[23]. Ferner ergibt sich: *Jeder Ring C ist als direkte Summe zweier Teilmoduln $U + V$ darstellbar. Dabei liegt V im Radikal. U ist sogar Teilring und besitzt eine Darstellung $U \cong B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_r$, wo die B_ρ vollprimäre Ringe sind.* [24]

15. Sätze über direkte Produkte. Wir betrachten jetzt Algebren über einem Grundkörper K. Dann gelten die Sätze: [25]

Sind A und B einfach und hat A das Zentrum K, so ist $A \times B$ einfach. Sind A und B halbeinfach, und hat K die Charakteristik 0, so ist auch $A \times B$ halbeinfach. Bei beliebiger Charakteristik von K nennen wir eine halbeinfache Algebra von endlichem Rang *separabel*, wenn $A \times A$ halbeinfach ist. Ist A ein Erweiterungskörper von K, so deckt sich dies mit dem gewöhnlichen Begriff der Separabilität (I B 4 (*Baer*) Nr. **19**). Allgemein ist A separabel, wenn jeder als direkte Summand des Zentrums auftretende Körper (Nr. 9) separabel ist. Dann gilt: *Ist A halbeinfach und separabel und B halbeinfach, so ist $A \times B$ halbeinfach.*

Ist A eine beliebige Algebra mit 1-Element 1, ist ferner B einfache

23) S. *Wedderburn*[12], *Artin*[15].

24) S. *Scorca*[17], *Dickson*[17], *Köthe*[16]; Eindeutigkeitsaussagen bei *G. Scorca*, Rend. Sem. Math. Univ. Roma (4) **1**, 59, 1936. — Weitere Literatur: *G. Scorca*, Atti Accad. Sci. Torino **70**, 26, 1935; Rendiconti Accad. d. L. Roma (6) **23**, 915, 1936; *J. Levitzki* Ann. Math. (2) **36**, 984, 1935; *F. S. Nowlan*, Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 854, 1931; *L. E. Bush*, Amer. J. Math. **54**, 419, 1932.

25) Für weitergehende Aussagen vgl. man *van der Waerden*[17], §119, *R. Brauer*[6].

Teilalgebra von endlicher Ordnung, die 1 enthält und K als Zentrum besitzt, so ist $A \cong B \times C$. Dabei besteht die Teilalgebra C aus denjenigen Elementen von A, die mit jedem Element von B vertauschbar sind[26][27].

16. Abspaltung des Radikals. *Ist die Restklassenalgebra A/N einer Algebra A von endlichem Rang nach ihrem Radikal N separabel* (*Nr.* **15**), *so enthält A eine zu A/N isomorphe Teilalgebra B, und es ist $A = B + N$*[28]. Die Vorausssetzung der Separabilität ist naturlich stets erfüllt, wenn der Grundkörper K die Charakteristik 0 hat oder allgeminer vollkommen ist.

Zu beachten ist, daß B im allgemeinen kein Ideal von A und nicht eindeutig bestimmt ist. Inforgedessen ist die Struktur von A nicht völlig durch die von A/N und N festgelegt; es braucht nicht $A = B \oplus N$ zu sein.

Es läßt sich aber mit Hilfe des obigen Satzes und der vorangehenden Strukturtheorie zeigen, daß die Aufgabe der Aufstellung aller Algebren endlichen Ranges über K im wesentlichen auf die beiden folgenden Probleme zurückgeführt werden kann: I. Aufstellung aller Divisionsalgebren über K; II. Aufstellung aller nilpotenten Algebren und ihrer Darstellungen durch Matrizen. Auf die erste Frage gehen wir im Abschnitt C ein; über die zweite Frage ist wenig bekannt[29].

17. Die Diskriminantenmatrix. Wir geben eine Methode zur Bestimmung des Radikals N einer Algebra A von endlichem Rang im Fall eines Grundkörpers K der Charakteristik 0; dabei werden die Bezeichnungen von Nr. **5** verwendet. Es ist α in A dann und nur dann nilpotent, wenn $R(\alpha)$ nur charakteristische Wurzeln 0 hat, und dann und nur dann ist α Wurzelgröße, wenn $\sigma_1(\alpha\xi) = 0$ für alle ξ aus A gilt. Dies ergibt ein System linearer Gleichungen für die Komponenten von α.

---

26) *J. L. M. Wedderburn*, Proc. R. Soc. Edinburgh **26**, 48, 1906 und a.a.O.[17]; *M. Herzberger*, Dissertation Berlin 1923, S. 30.

27) Weitere Literatur: *J. Levitzki*, Ann. Math. (2) **33**, 377, 1932 behandelt normale Produkte, die als Verallgemeinerung der direkte Produkte angesehen werden können. - *F. Mittelsten Scheid*, Math. Z. **14**, 263, 1922 beweist einen Eindeutigkeitssatz für die direkte Produktdarstellung von Kernringen (Nr. **14**) über algebraisch abgeschlossenem Grundkörper.

28) Vgl. dazu *Cartan*[1], *Wedderburn*[12], *Dickson*[17], *Deuring*[16], ferner *G. Scorca*, Rendiconti Accad. d. L. Roma (6), **20**, 65, 1934.

29) Literatur über nilpotente Algebren: *O. C. Hazlett*[5], *G. W. Smith*. Amer. J. Math. **41**, 143, 1919; *G. Scorca*, Rendiconti Accad. d. L. Roma (6), **20**, 143, 1934; Atti Accad. Sci. Torino **70**, 196, 1935; Ann. Mat. Pura Appl. (4) **14**, 1, 1935. Klassifikation der Algebren der Ordnung $n \leqq 4$ findet sich bei *G. Scorca*, Atti. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (2) **20**, Nr. 13, 14, 1935. Vgl. auch *K. S. Ghent*, Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 331, 1934.

Die zugehörige Matrix ist

$$D = (\sigma_1(\varepsilon_\kappa \varepsilon_\lambda)) = \sum_{\rho,\sigma} c_{\kappa\lambda\rho} c_{\sigma\rho\sigma}, \tag{22}$$

die *Diskriminantenmatrix* von A; sie ist symmetrisch. Hat D den Rang h, so hat N den Rang $n - h$[30]. *Insbesondere ist A dann und nur dann halbeinfach, wenn $D \neq 0$ ist*; dann nur dann ist A nilpotent, wenn $D = 0$ ist. Hat K die Charakteristik $p \neq 0$, so hat N höchstens den Rang $n - h$.

Wenn A ein 1-Element besitzt, so kann man anstelle von (22) eine Determinante $d = |\sigma(\varepsilon_\kappa \varepsilon_\lambda)|$ bilden, wobei $-\sigma(\alpha)$ den zweitobersten Koeffizienten des Gradpolynoms oder der Hauptgleichung (Nr. 5) $f(\alpha) = \alpha^n - \sigma(\alpha)\alpha^{n-1} + \ldots$ von α bezeichnet. Es sei Ω der durch algebraischen Abschluß von K erhaltene Körper. Dann verschwindet bei beliebiger Charakteristik von K die Determinante d dann und nur dann nicht, wenn die Algebra A_Ω halbeinfach ist.

Man bilde noch eine Determinante Δ vom Grad n^2 aus den n^4 Größen

$$d(\kappa, \lambda; \mu, \nu) = \sum_\rho c_{\kappa\mu\rho} c_{\rho\lambda\nu},$$

wo in jeder Zeile die Indizes κ, λ feste Werte haben, in jeder Spalte die Indizes μ, ν. Dann und nur dann ist $\Delta \neq 0$, wenn A einfach ist und K als Zentrum besitzt[31].

C. Einfache Algebren von endlicher Ordnung

18. Algebrenklassen. Im folgenden betrachten wir einfache Algebren A von endlichem Rang n über einem Grundkörper K. Die aus allen Matrizen eines festen Grades r mit Koeffizienten aus A bestehende einfache Algebra bezeichnen wir mit A_r. Wir identifizieren das 1-Element von A mit dem von K, fassen also K als Teilmenge von A auf. Ist dabei K selbst das Zentrum von A, so heißt A *normal.*

Nach Nr. 13 gehört zu A eine Divisionsalgebra D und eine Zahl r, so daß $A \cong D_r$ ist. Zwei einfache Algebren A und $\bar{A}$ heißen *ähnlich*, $A \sim \bar{A}$, wenn die zugehörigen Divisionsalgebren isomorph sind. Man bezeichnet als *Algebrenklasse* $\{A\}$ von A die Gesamtheit der zu A ähnlichen Algebren; dies sind also die zu D_1, D_2, $D_3, \ldots$ isomorphen

30) *Frobenius*[1]. Weitere Literatur über die Diskriminantenmatrix: *C. C. MacDuffee*, Ann. Math. (2) **32**, 60, 1931; Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 425, 1931; *L. E. Bush*, Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 49, 1932; *R. F. Rinehart*, Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 570, 1936; *R. Stauffer*, Amer. J. Math. **58**, 585, 1936 (komplementäre Basen). Ferner s.[6].

31) *K. Shoda*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **10**, 195, 1934. Im Fall, daß K algebraisch abgeschlossen ist, vgl. auch *F. Hausdorff*, Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **52**, 43, 1900.

Algebren. Sieht man isomorphe Algebren als gleich an, so entsprechen sich Divisionsalgebren und Algebrenklassen eineindeutig. Alle Algebren von $\{A\}$ haben isomorphe Zentren, insbesondere sind sie gleichzeitig normal.

Der Grad q des Zentrum Z von A ist ein Teiler von n, $n = qn'$. Man kann A auch als Algebra des Ranges n' büer Z auffassen. Dann ist A normal; man kann sich meist auf Behandlung normaler Algebren beschränken.

19. Zerfällungskörper. Index. Wir nehmen im folgenden von Teilkörpern und Teilalgebren von A stets stillschweigend an, daß sie K enthalten. Ferner setzen wir bei isomorphen Abbildungen von Erweiterungskörpern von K immer voraus, daß jedes Element von K sich selbst entspricht. Ein Teilkörper von A heißt *maximal*, wenn er in keinem umfassenderen Teilkörper enthalten ist.

Ist A eine einfache normale Algebra vom Rang n, so gibt es stets Körper Ω über K, für die $A_\Omega = A \times \Omega$ (Nr. **10**) einer vollen Matrixalgebra Ω_f aus Ω isomorph ist (*Wedderburn*[12]); man nennt diese Ω die *Zerfällungskörper* von A. Es folgt, daß $n = f^2$ eine Quadratzahl ist. Hat die zu A ähnliche Divisionsalgebra D den Rang m^2, so heißt m der *Index* von A. Jeder Zerfällungskörper von A ist Zerfällungskörper für alle Algebren von $\{A\}$; alle diese Algebren haben denselben Index.

Nach *R. Brauer* und *E. Noether*[32] gilt: *Dann und nur dann ist ein Körper Ω von endlichem Grad w über K ein Zerfällungskörper der normalen einfachen Algebra A, wenn Ω einem maximalen Teilkörper einer Algebra der Klasse $\{A\}$ isomorph ist.* Ferner ist w ein Vielfaches sm des Index m, und Ω ist dann genauer einem maximalen Teilkörper von D_s isomorph.

Ist t der Grad eines maximalen Teilkörpers T von $A \cong D_r$, so ist $k = \dfrac{mr}{t}$ ganz, und jedes nichtlineare Polynom mit Koeffizienten aus T von einem in k aufgehenden Grad ist in T reduzibel. Für eine weite Klasse von Grundkörpern K folgt daraus $t = mr$. Maximale Teilkörper von D selbst haben stets den Grad m; *es gibt also stets Zerfällungskörper m-ten Grades.*

Ist $\Omega \supseteqq K$ irgendein Körper, so hat A_Ω inbezug auf Ω als Grundkörper einen in m aufgehenden Index m', $m = jm'$. Hat Ω endlichen

32) *R. Brauer - E. Noether*, S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1927, 221. Vgl. ferner *R. Brauer*[17]; *B. L. van der Waerden*[17], § 128; *A. A. Albert*, Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 690, 1931; *H. Hasse*, Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 171, 1932; *R. Brauer*, J. Reine Angew. Math. **166**, 241, 1932; *E. Noether*, Math. Z. **37**, 514, 1933.

Grad w über K, so gilt $j|w$.

Es gibt stets separable Zerfällungskörper vom Grad m[33]. Gilt in K der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz (I B 5 (*Baer*) Nr. 40), so besitzt A separable affektlose Zerfällungskörper vom Grad mr für $r = 1, 2, \ldots$.[34]

Der Index m stimmt mit dem Schurschen Index der absolut irreduziblen Darstellung von A überein (14 (*Deuring*)).

Für nicht normale Algebren gilt: Ist A einfach und separabel über K, und hat sein Zentrum Z den Grad q über K, so ist A_Ω für irgendeinen Erweiterungskörper Ω von K direkte Summe von höchstens q einfachen Algebren F_ρ. Ist Ω ein Z enthaltender Normalkörper über K, so hat man ganau q Summanden F_ρ. Diese sind normal über Ω. Bei geeigneter Wahl der Basen sind die Zusammensetzungsgrößen $c_{\kappa\lambda\mu}$ der verschiedenen F_ρ algebraisch konjugiert in bezug auf K.

20. Galoissche Theorie für normal einfache Algebren[35]. *Jeder Automorphismus einer normal einfachen Algebra ist ein innerer Automorphismus, d. h. von der Form* $\alpha \to \tau^{-1}\alpha\tau$, *wo* τ *ein festes Element von* A *ist, das ein Inverses* τ^{-1} *besitzt*[36]. Sind allgemeiner zwei K enthaltende einfache Teilalgebren B und $\bar{B}$ durch $\beta \to \bar{\beta}$ isomorph auf einander bezogen, so gibt es ein τ in A, derart daß $\bar{\beta} = \tau^{-1}\beta\tau$ für alle β in B gilt.

Für jede Algebra M mit 1-Element bezeichne M^* die multiplikative Gruppe der Elemente, die nicht Nullteiler sind. Die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von A ist dann zu A^*/K^* isomorph. Zu jeder Teilalgebra $B \supseteqq K$ von A gehört wie in der Galoisschen Theorie eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Die mit allen Elementen von B vertauschbaren Elemente von A bilden eine Teilalgebra $C = V(B)$, das *kommutierende System* von B. Es ist $\mathfrak{H} \cong C^*/K^*$.

Ist B halbeinfach, so ist auch $C = V(B)$ halbeinfach, und es ist umgekehrt $B = V(C)$. Alle Untergruppen der Form C^*/K^* in $\mathfrak{G}$ für halbeinfaches $C \supseteqq K$ kommen also für $\mathfrak{H}$ in Betracht. Enthält K nicht nur zwei Elemente, so besteht B umgekehrt aus den Größen, die bei allen Automorphismen von $\mathfrak{H}$ festbleiben. Aus diesen Ergebnissen können die

33) *G. Köthe*, J. Reine Angew. Math. **166**, 182, 1932. Vgl. ferner: *E. Noether*[32]; A. A. Albert, Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 388, 1934.

34) *A. A. Albert*. Bull. Amer Math. Scc. **35**, 355, 1929.

35) Der Grundgedanke dieser Theorie ist von *E. Noether* in Vorlesungen 1928 entwickelt worden. Der weitere Ausbau erfolgte in *Van der Waerden*[17], §128; *A. A. Albert*[32]; Bull. Amer. Math. Scc. **37**, 777, 1931; Trans. Amer. Math. Scc. **34**, 620, 1932; *R. Brauer*, J. Reine Angew. Math. **166**, 241, 1932; *K. Shoda*, Math. Ann. **107**, 252, 1932; Proc. Imp. Acad. Tokyo **10**, 195, 1934; *E. Noether*, Math. Z. **37**, 513, 1933.

36) *Th. Skolem*, Skr. Norske Vidensk. Akad. Oslo 1927, Nr. 12. Vgl. ferner *R. Brauer*[17, 32]; *Van der Waerden*[17] § 128; *E. Noether*[32].

Sätze der gewöhnlichen Galoisschen Theorie (10 (*Baer*) Nr. **19**) abgeleitet werden[37].

Weiter gelten die Sätze: Ist B einfach, so ist auch $C = V(B)$ einfach, und B und C haben dasselbe Zentrum Z. Das Produkt der Ränge von B und C ergibt den Rang von A. Das in bezug auf Z als Grundkörper gebildete direkte Produkt $B \times C$ ist zu $T = V(Z)$ isomorph; T ist die maximale Teilalgebra von A mit dem Zentrum Z. Schließlich gilt $A_Z \cong T_q$, who q der Grad von Z über K ist. Speziell ergibt sich: Ist B ein einfache normale Teilalgebra von A, so ist $A = B \times C$ mit $C = V(B)$ (vgl. Nr. **10**).

Ist A eine normale Divisionsalgebra vom Index m, H eine einfache Algebra, so folgt aus diesen Sätzen, daß H dann und nur dann Teilalgebra von A_r ist, wenn r Vielfaches einer festen Zahl k ist. Es sei w der Grad des Zentrums Ω von H über K und h^2 den Rang von H über Z. Ferner habe $A \times H'$ den Index μ in bezug auf den Grundkörper Z, wo H' zu H reziprok isomorph ist. Dann gilt $k = \dfrac{wh\mu}{m}$.

Diese Ergebnisse enthalten die meisten Sätze von Nr. **19** als Spezialfall.

Automorphismen von einfachen nicht normalen Algebren sind von *J. Levitzki* und *H. Weyl*[17] behandelt worden. *G. Köthe*[38] untersucht Schiefkörper D von unendlichem Rang; hier ist nicht jeder Automorphismus ein innerer Automorphismus. *E. Noether*[32] betrachtet für derartiges D einfache Teilalgebren B von endlichem Rang in D_r.

21. Verschränkte Produkte. Von *Dickson*[39] stammt eine wichtige Methode zur Konstruktion von Algebren, die eine gewisse Verwandtschaft mit der Bildung des Gruppenringes (Nr. 4) besitzt. Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der Ordnung r, so ordnen wir den r Elementen $g_1, g_2, \ldots, g_r$ von $\mathfrak{G}$ Symbole $\varepsilon_{g_1}, \varepsilon_{g_2}, \ldots, \varepsilon_{g_r}$ zu und bilden Elemente

$$\alpha = \varepsilon_{g_1}\omega_1 + \varepsilon_{g_2}\omega_2 + \ldots + \varepsilon_{g_r}\omega_r. \tag{23}$$

Wir lassen hier für die ω_ρ allgemeiner als in Nr. 4 beliebige Größen aus einem Erweiterungskörper Ω des Grundkörper K zu. Zwei Elemente (23) gelten als gleich, wenn entsprechende Koeffizienten ω_ρ gleich sind. Wir multiplizieren α mit t, indem wir alle ω_ρ mit t multiplizieren; wir addieren zwei Größen (23), indem wir entsprechende Koeffizienten ω_ρ

---

37) Andere Sätze über halbeinfache Teilringe von einfachen Ringen finden sich bei *J. Levitzki*, Math. Z. **33**, 663, 1931.

38) Math. Ann. **105**, 15, 1931.

39) Trans. Amer. Math. Soc. **28**, 207, 1926, ferner *Dickson*[17].

addieren.

Bei der Definition des Produktes ersetzen wir einmal das im Gruppenring gültige Gesetz $\varepsilon_g \varepsilon_h = \varepsilon_{gh}$ (für g, h in $\mathfrak{G}$) durch

$$\varepsilon_g \varepsilon_h = \varepsilon_{gh} a_{g,h}, \tag{24}$$

wo die $a_{g,h}$ Größen aus Ω sind, $a_{g,h} \neq 0$. Andererseits verzichten wir auf die Vertauschbarkeit von ε_g mit den nicht in K liegenden Größen ω aus Ω, sondern fordern statt dessen nur

$$\omega \varepsilon_g = \varepsilon_g \omega',$$

wo ω' ein von ω und g abhängiges Element von Ω ist. Dabei hat man vorauszusetzen, daß $\omega \to \omega'$ ein Automorphismus g^* von Ω ist, und daß $\mathfrak{G}$ durch die Zuordnung von g^* zu g homomorph auf die Gruppe dieser Automorphismen bezogen ist. Wir betrachten nur den Fall, daß Ω ein Normalkörper über K und $\mathfrak{G}$ selbst seine Galoissche Gruppe ist. Das aus ω in Ω durch den Automorphismus g in $\mathfrak{G}$ hervorgehende Element sei mit ω^g bezeichnet. Dann fordern wir genauer

$$\omega \varepsilon_g = \varepsilon_g \omega^g. \tag{25}$$

Das assoziative Gesetz der Multiplikation für die ε_g führt auf die Gleichung

$$a_{g,h}^k a_{gh,k} = a_{g,hk} a_{h,k} \qquad (g,\ h,\ k \text{ in } \mathfrak{G}). \tag{26}$$

Wegen (24) und (25) muß man setzen (ζ_μ, η_ν in Ω):

$$\sum_\mu \varepsilon_{g_\mu} \zeta_\mu \sum_\nu \varepsilon_{g_\nu} \eta_\nu = \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{g_\mu g_\nu} (\zeta_\mu^{g_\nu} \eta_\nu a_{g_\mu, g_\nu}). \tag{27}$$

Es sei also Ω ein Normalkörper r-ten Grades über K mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$, ferner sei $a_{g,h} \neq 0$ ein System von r^2 Größen aus Ω, die (26) erfüllen. Dann bilden die Größen (23) eine Algebra A über K als Grundkörper, wenn Addition und Multiplikation mit Größen aus K in naturgemäßer Weise und Multiplikation zweier Größen (23) durch (27) definiert wird. A heißt das *verschränkte Produkt* von $\mathfrak{G}$ und Ω mit $a_{g,h}$ als *Faktorensystem*

$$A = (a_{g,h},\ \Omega) \text{ oder } A = (a_{g,h},\ \Omega/K).$$

Ist e das 1-Element von $\mathfrak{G}$, so ist $1 = \varepsilon_e \cdot a_{e,e}^{-1}$ das 1-Element von A. Die Größen $1 \cdot \omega$ mit ω in Ω bilden einen zu isomorphen Teilkörper von A, den wir mit Ω identifizieren.

Für das verschränkte Produkt gelten die folgenden Sätze[40]:

I. A ist normal und einfach über K vom Rang r^2, der Normalkörper Ω vom Grade r ist maximaler Teilkörper von A. Umgekehrt ist jede Algebra mit diesen Eigenschaften zu einem verschränkten Produkt $(a_{g,h}, \Omega)$ für geeignetes $a_{g,h}$ isomorph.

II. Jede Klasse normaler einfacher Algebren enthält verschränkte Produkte $(a_{g,h}, \Omega)$ für geeignetes Ω, $a_{g,h}$.

III. Dann und nur dann gilt $(a_{g,h}, \Omega) \cong (a'_{g,h}, \Omega)$ für zwei Faktorensysteme $a_{g,h}$ und $a'_{g,h}$, wenn Gleichungen

$$a'_{g,h} = a_{g,h} \frac{\omega_g^h \omega_h}{\omega_{gh}} \tag{28}$$

bestehen, wo ω_g von 0 verschiedene Größen aus Ω sind. Die beiden Faktorensysteme heißen dann *assoziiert*.

IV. Dann und nur dann ist $A = (a_{g,h}, \Omega)$ eine volle Matrixalgebra aus K, d. h. $\{A\} = \{K\}$, wenn $a_{g,h}$ zu dem *Einsfaktorensystem* $a^*_{g,h} = 1$ (für alle g, h aus $\mathfrak{G}$) assoziiert ist.

V. Ist Δ ein zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ gehöriger Teilkörper von Ω, so gilt $A_\Delta \sim (\bar{a}_{p,q}, \Omega/\Delta)$, wo $\bar{a}_{p,q}$ das durch $\bar{a}_{p,q} = a_{p,q}$ (für p, q in $\mathfrak{H}$) definierte Faktorensystem in bezug auf Δ als Grundkörper ist. Gilt insbesondere $a_{p,q} = 1$ für alle p, q aus $\mathfrak{H}$, so ist Δ Zerfällungskörper.

VI. Ist P *ein* Ω umfassender Normalkörper mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{R}$. so setze man $\tilde{a}_{w,z} = a_{g,h}$, wenn w und z aus $\mathfrak{R}$ die Automorphismen g bezw. h des Teilkörpers Ω von P induzieren. Dann ist

$$(\tilde{a}_{w,z}, P/K) \sim (a_{g,h}, \Omega/K).$$

VII. Für zwei Faktorensysteme $a_{g,h}$ und $b_{g,h}$ gilt

$$(a_{g,h}, \Omega) \times (b_{g,h}, \Omega) \sim (a_{g,h} b_{g,h}, \Omega). \tag{29}$$

VIII. Es ist $(a^{-1}_{g,h}, \Omega)$ zu $(a_{g,h}, \Omega)$ reziprok isomorph.

---

40) Die zweiter Häfte von Satz I stammt von *Dickson*[39]. Die Sätze I bis VIII wurden im Rahmen einer etwas allgemeineren Theorie (Nr. **23**) gegeben in *R. Brauer*, Math. Z. **28**, 677, 1928; **30**, 79, 1929. Einen direkten Aufbau der verschränkten Produkte gab *E. Noether* in Vorlesungen 1929. Man vgl. die Darstellung von *H. Hasse*, Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 171, 1932 und *M. Deuring*[16], S. 52—67. Für Beweise zu einzelnen der Sätze und weitere Bemerkungen ferner *R. Brauer*, J. Reine Angew. Math. **168**, 44, 1932; *A. A. Albert*, Amer. J. Math. **54**, 1, 1932; *C. Chevalley*, J. Reine Angew. Math. **169**, 141, 1932; *H. Hasse*, Math. Ann. **107**, 731, 1933; *K. Shoda*, Japan. J. Math. **10**, 57, 1933; *O. Teichmüller*, Deutsche Math. **1**, 92, 1936. Der letztgenannte behandelt eine Verallgemeinerung der verschränkte Produkte; vgl. dazu auch *O. Teichmüller*, Deutsche Math. **1**, 197, 1936.

IX.[41] Ist $\mathfrak{Q}$ ein Klasse konjugierter Elemente aus $\mathfrak{G}$ mit c Elementen, so ist $a_{g,h}^{c}$ assoziiert zu $\Pi a_{g,h}^{q}$, wo über alle q aus $\mathfrak{Q}$ zu multiplizieren ist. Ist $\mathfrak{Q}$ invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und Λ der zugehörige Teilkörper von Ω, so sei $p_1, p_2, \ldots, p_s$ ein Restsystem von $\mathfrak{G}$ (mod $\mathfrak{Q}$). Man setze $\bar{g} = p_\mu$ für g in $p_\mu\mathfrak{Q}$. Dann gilt $(a_{g,h}, \Omega)^c \sim (a'_{\bar{g},\bar{h}}, \Lambda)$ mit

$$a'_{\bar{g},\bar{h}} = \prod_{q \text{ in } \mathfrak{Q}} a_{\bar{g},\bar{h}}^{q} \prod_{q \text{ in } \mathfrak{Q}} \frac{a_{\bar{g}\cdot\bar{h},q}}{a_{\overline{gh},q}} \tag{30}$$

Ist speziell $\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}\mathfrak{T}$, wo $\mathfrak{T}$ eine zu $\mathfrak{Q}$ teilerfremde Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, so kann man in (30) rechts das zweite Produkt weglassen.

X[42]. Ist K^* die multiplikative Gruppe der von 0 verschiedenen Größen aus K und N die Untergruppe der Relativnormen von Größen aus Ω, so wird $\mathfrak{G}$ durch $g \to \prod_{q \text{ in } \mathfrak{Q}} a_{g,q} \cdot N$ homomorph auf eine Untergruppe von K^*/N abgebildet. Die Elemente der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ und nur diese entsprechen N.[43]

22. Zyklische Algebren[44]. Besonders wichtig ist der Fall, daß in Nr. **21** der Körper Ω zyklisch ist. Ist s ein erzeugendes Element von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung r, und setzt man $u = \varepsilon_s$, so kann man die Elemente des verschränkten Produkts in der Form schreiben

$$\alpha = \omega_0 + u\omega_1 + u^2\omega_2 + \ldots + u^{r-1}\omega_{r-1}, \tag{31}$$

wo die ω_ρ Größen aus Ω sind. Es gilt hier

$$u^r = a, \qquad \omega u = u\omega^s, \tag{32}$$

wo a in K liegt. Dabei ist

$$a = a_{s,1}a_{s,s}a_{s,s^2} \ldots a_{s,s^{r-1}}.$$

Durch (32) ist die Multiplikation der Größen (31) völlig bestimmt.

Ist umgekehrt $a \neq 0$ irgendeine Größe aus K, so erhält man so eine Algebra A. Es ist $A \cong (a'_{g,h}, \Omega)$, wo für $g = s^\lambda$, $h = s^\mu$ mit $0 \leqq \lambda, \mu < r$ hier $a'_{g,h} = 1$ oder $a'_{g,h} = a$ sei, je nachdem ob $\lambda + \mu < r$ oder $\lambda + \mu \geqq r$

41) *E. Witt*, J. Reine Angew. Math. **173**, 191, 1935. Ein etwas speziellerer Satz findet sich bereits bei *C. Chevalley*[10]. Vgl. ferner *Y. Akizuki*, Math. Ann. **112**, 566, 1935.

42) *T. Nakayama*, Math. Ann. **112**, 85, 1935; *Y. Akizuki*[41].

43) Spezielle verschränkte Produkte werden untersucht bei *L. E. Dickson*[42] und Trans. Amer. Math. Soc. **32**, 319, 1930; *F. Cecioni*, Ren. Circ. Mat. Palermo **47**, 209, 1923; *R. Garver*, Ann. Math. (2) **28**, 493, 1927; *J. Williamson*, Trans. Amer. Math. Soc. **30**, 111, 1928; *M. S. Rees*, Amer. J. Math. **54**, 51, 1932.

44) *L. E. Dickson*, Trans. Amer. Math. Soc. **15**, 31, 1914; *J. L. M. Wedderburn*, ebenda S. 162.

ist.

Man bezeichnet A als *zyklische Algebra* $A = (a, \Omega, s)$.

Dann und nur dann ist $(a, \Omega, s) \cong (b, \Omega, s)$, wenn $\frac{a}{b}$ Norm einer Größe aus Ω ist; speziell gilt $(a, \Omega, s) \sim K$ dann und uur dann, wenn a selbst Norm ist.

23. Faktorensysteme zn beliebigen Zerfällungskörpern[45]. Es sei Ω ein separabler Körper r-ten Grades über K, $\Omega = K(\theta)$. Es seien $\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_r$ die Konjugierten zu θ, Ω^* sei der durch sie erzeugte Normalkörper und $\mathfrak{G}$ seine Galoissche Gruppe. Gilt $\theta_\mu^g = \theta_\nu$ für g in $\mathfrak{G}$, so setzen wir $\nu = \mu \cdot g$. Ein System von r^3 Zahlen $b_{\kappa\lambda\mu}$ aus Ω^* heißt ein *konjugiertes Tripelsystem*, wenn $b^g_{\kappa\lambda\mu} = b_{\kappa g, \lambda g, \mu g}$ für alle g aus $\mathfrak{G}$ gilt. Analog sind konjugierte Doppelsysteme zu definieren.

Unter einem *Faktorensystem* zu Ω in bezug auf K als Grundkörper verstehen wir ein konjugiertes Tripelsystem, dessen Zahlen von 0 verschieden sind und die Gleichung erfüllen

$$b_{\kappa\lambda\mu} b_{\kappa\mu\nu} = b_{\kappa\lambda\nu} b_{\lambda\mu\nu} . \tag{33}$$

Die Gesamtheit der Matrizen r-ten Grades

$$M = (b_{\kappa\lambda r} l_{\kappa\lambda}) \tag{34}$$

für alle konjugierten Doppelsysteme $l_{\kappa\lambda}$ aus Ω^*, bildet eine normale einfacha Algebra A der Ordnung r^2 über K, die Ω als Zerfällungskörper besitzt. Jede derartige Algebra kann umgekehrt bei geeigneter Wahl der $b_{\kappa\lambda\mu}$ in dieser Weise dargestellt werden. Es gelten analog Sätze zu I—VIII in Nr. **21.**

Ist Ω selbst Normalkörper über K, so wird der Zusammenhang zwischen beiden Arten von Faktorensystemen von K durch

$$a_{g,h} = b_{r\cdot(gh),\ r\cdot h,\ r} \tag{35}$$

hergestellt.

Das Faktorensystem von A kann auch mit Hilfe der Darstellungen von A definiert werden (vgl. I B 9 (*Deuring*)). Eine Verallgemeinerung dieser Faktorensysteme ist bei *Weyl*[17] gegeben.

24. Die Gruppe der Algebrenklassen. Für die Klassen einfacher normaler Algebren $\{A\}, \{B\}, \ldots$ über K kann man durch $\{A\}\{B\} = \{A \times B\}$ eine Multiplikation definieren, die von der Auswahl von A und

45) *R. Brauer*[40].

B in ihren Klassen unabhängig ist. Nach *R. Brauer*[46] bilden die Algebren klassen eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{T}$. Einheitselement ist die Klasse $\{K\}$ der vollen Matrixalgebren aus K. Das zu $\{A\}$ inverse Element ist $\{A'\}$, wo A' zu A reziprok isomorph ist. Jedes Element $\{A\}$ von $\mathfrak{T}$ besitzt eine endliche Ordnung l, d. h. das direkte Produkt von l Faktoren A ist einer vollen Matrixalgebra aus K isomorph. Diese Zahl l, der *Exponent* von A, geht im Index m von A auf, und ist durch jeden Primteiler von m teilbar. Die Algebrenklassen, die einen festen Körper Ω als Zerfällungskörper besitzen, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{T}$.

Die Tatsache, daß jedes Element in $\mathfrak{T}$ als Produkt von Elementen teilerfremder Ordnungen geschrieben werden kann, liefert den Satz: *Hat die normale Divisionsalgebra A den Index $m=p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}\dots p_s^{\mu_s}$, wo $p_1, p_2, \dots, p_s$ verschiedene Primzahlen sind, so kann A als direktes Produkt $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_s$ von normalen Divisionsalgebren D_σ vom Index p^{μ_σ} $(\sigma=1, 2, \dots, s)$ dargestellt werden*[47]. Umgekehrt ist jedes solche Produkt eine normale Divisionsalgebra. Ist A eine zyklische Algebra, so kann man alle D_σ zyklisch wählen und umgekehrt.

Auch im Fall eines Primzahlpotenzindex kann A als direkte Produkt darstellbar sein. Ist aber z. B. $l = m$, so ist dies sicher unmöglich[48].

Der Exponent von A^h ist natürlich $\frac{l}{(l, h)}$. Der Index ist ein Teiler von $\frac{m}{(m, h)}$; im Fall $(h, m) = 1$ ist der Index m. Der Index von $\{A\}\{B\}$ geht im Produkt der Indizes von $\{A\}$ und $\{B\}$ auf.

25. Aufstellung der Algebrenklassen[49]. Jede Klasse $\mathfrak{A}$ normaler einfacher Algebren enthält Algebren A, die als verschränkte Produkt $(a_{g,h}, \Omega)$ darstellbar sind. Wir setzen voraus, daß die Charakteristik von K nicht eine im Exponenten n der Algebren von $\mathfrak{A}$ aufgehende Primzahl ist (für den ausgeschlossenen Fall vgl. Nr. 26). Man kann A in $\mathfrak{A}$ weiter so wählen, daß das Faktorensystem $a_{g,h}$ aus n-ten Einheitswurzeln besteht. Sind die Bezeichnungen dieselben wie in Nr. 21, ist ferner ζ eine

46) Jber. Deutsch. Math.-Verein. **38**, 47, 1929, und J. Reine Angew. Math. **166**, 241, 1932. Vgl. ferner *H. Hasse*[10], *M. Deuring*[15]. Einige Resultate für den Fall von Divisionsalgebren unendlicher Ordnung bei *G. Köthe*[38].

47) *R. Brauer*[40], vgl. auch [46] und *A. A. Albert*[40] wo die Umkehrung formuliert wurde. Diese findet sich auch bei *G. Köthe*[38].

48) Beispiele von Divisionsalgebren mit verschiedenartigem Verhalten werden gegeben in: *R. Brauer*, Math. Z. **31**, 733, 1930; Tôhoku Math. J. **37**, 77, 1933; *G. Köthe*[38]; *A. A. Albert*, Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 727, 1931; **38**, 449, 1932; **39**, 265, 1933; *T. Nakayama*, Jap. J. Math. **12**, 65, 1935.

49) *R. Brauer*, J. Reine Angew. Math. **168**, 44, 1932.

primitive n-te Einheitswurzel, so bilden die Elemente $\varepsilon_g \zeta^\nu$ (für g in $\mathfrak{G}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), eine Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung nr. Durch $\varepsilon_g \zeta^\nu \rightarrow g$ wird $\mathfrak{H}$ homomorph auf $\mathfrak{G}$ bezogen. Dabei geht die zyklische Untergruppe $\mathfrak{S}$ der Elemente ζ^ν in das Einheitselement über, und schließlich ist

$$\zeta \varepsilon_g = \varepsilon_g \zeta^g. \tag{36}$$

Umgekehrt sei eine Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung rn gegeben, die eine homomorphe Abbildung τ auf $\mathfrak{G}$ besitzt, bei der eine zyklische Untergruppe $\mathfrak{S}$ in das Einheitselement übergeht, $\mathfrak{H}/\mathfrak{S} \cong \mathfrak{G}$. Wir identifizieren ein erzeugendes Element von $\mathfrak{S}$ mit der Einheitswurzel ζ. Für g in $\mathfrak{G}$ sei ε_g ein auf g abgebildetes Element von $\mathfrak{H}$; wir setzen voraus, daß (36) gilt. Dann definiert $a_{g,h} = \varepsilon_{gh}^{-1} \varepsilon_g \varepsilon_h$ umgekehrt ein aus n-ten Einheitswurzeln bestehendes Faktorensystem. Um alle derartigen Systeme zu erhalten, hat man nicht nur alle in Frage kommenden Gruppen $\mathfrak{H}$ zu nehmen, sondern für jedes $\mathfrak{H}$ auch alle die Bedingungen erfüllenden homomorphen Abbildungen τ zu betrachten. Enthält K selbst die n-ten Einheitswurzeln, so ist die Bedingung (36) einfach, daß $\mathfrak{S}$ dem Zentrum von $\mathfrak{H}$ angehört.

Besitzt $\mathfrak{H}$ eine echte Untergruppe $\mathfrak{H}'$ der Ordnung rn', derart daß der Durchschnitt von $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{S}$ die Ordnung n' hat, so ist der Exponent des zugehörigen Faktorensystems kleiner als n. Nehmen wir also an, daß $\mathfrak{H}$ keine derartige Untergruppe $\mathfrak{H}'$ enthält. Dann gilt der Satz: *Dann und nur dann ist das durch $\mathfrak{H}$ definierte Faktorensystem zum Einssystem assoziiert, wenn sich Ω derartig in einen Normalkörper A mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{H}$ über K einbetten läßt, daß der Automorphismus $\varepsilon_g \zeta^\nu$ von A den Automorphismus g von Ω induziert.* Weiter läßt sich auch die Frage, ob zwei durch Gruppen definierte Faktorensysteme assoziiert sind, auf ein ähnliches "Einbettungsproblem" zurückführen.

Um alle normalen Algebrenklassen vom Index m und Exponenten n aufzustellen, hat man zunächst alle Normalkörper Ω über K zu konstruieren, deren Grad unter einer nur von m abhängigen Schranke liegt. Für jedes Ω muß man weiter alle in Frage kommenden $\mathfrak{H}$ bilden und zu jedem das Faktorensystem $a_{g,h}$ und die Algebra $(a_{g,h}, \Omega)$ konstruieren. So erhält man jedenfalls Algebren aus allen Algebrenklassen. Ob zwei derartige Algebrenklassen gleich sind, hängt davon ab, ob ein bestimmtes Einbettungsproblem eine Lösung hat.

Shoda[50] hat eine Verallgemeinerung dieser Betrachtungen gegeben[51].

50) Japan. J. Math. **11**, 21, 1934.

51) Weitere Literatur über Divisionsalgebren: *A. A. Albert*, Ann. Math. (2) **30**, 322, 583, 1929; *O. C. Hazlett*, Trans. Amer. Math. Soc. **18**, 167, 1927; **32**, 912, 1930. Für involutorische Antiautomorphismen s. [89].

Nicht jeder Körper Z vom Grade l über K ist Zerfällungskörper von normalen einfachen Algebren vom Exponenten l. Auch die Bedingung dafür kann auf Einbettungsprobleme zurückgeführt werden.

26. Besondere Fälle. Normale Divisionsalgebren A vom Index m sind für $m = 2, 3, 6$ zyklische[52]. Im Fall $m = 2$ ist A eine verallgemeinerte Quaternionenalgebra mit vier Basiselementen $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, für die

$$\varepsilon_1^2 = a, \quad \varepsilon_2^2 = b, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2 = -\varepsilon_2\varepsilon_1 \tag{37}$$

gilt, wo a, b Größen aus K sind; $A = (a, K(\sqrt{b}), s)$. Dies ist dann und nur dann eine Divisionsalgebra, wenn $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ in K nur die Lösung $x = y = z = 0$ hat.

In den Fällen $m = 4$ und $m = 12$ läßt sich A als verschränktes Produkt darstellen[53]; es braucht aber nicht immer zyklisch zu sein[54]. Im Fall $m = 5$ gibt es einen aus K durch sukzessive Adjunktion von drei Quadratwurzeln und einer Kubikwurzel entstehenden Körper Λ, sodaß A_Λ zyklisch über Λ ist.

Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist K die einzige Divisionsalgebra über K[55], *Die einzigen einfachen Algebren sind die vollen Matrixalgebren K_r aus K. Die einzigen Divisionsalgebren über einem reell abgeschlossenen Körper K sind* 1) *der Körper selbst,* 2) *der Körper $K(i)$ mit* $i^2 = -1$, 3) *die Quaternionen*[56].

Wedderburn hat gezeigt: *Ist K ein Kärper mit nur endlich vielen Elementen, so gibt es keine normale Divisionsalgebra* (außer K selbst)[57]. Allgemein werden Körper, die nur zyklische algebraische Erweiterungskörper besitzen, bei *R. Brauer*[49] behandelt.

Weitgehend untersucht worden ist der Fall von normalen Divisionsalgebren A einer Ordnung p^e über einem Körper K der Charakteristik p. Ist K vollkommen, so gibt es keine derartige Algebra außer K selbst[49].

---

52) Für $m = 3$ *J. H. M. Wedderburn*, Trans. Amer. Math. Soc. **22**, 129, 1931; für $m = 6$ *R. Brauer*[40].

53) *A. A. Albert*, Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 253, 1929; Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 703, 1932,

54) *A. A. Albert*, Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 449, 1932; Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 112, 1933.

55) *Th. Molien*[1], *E. Cartan*[1], *G. Frobenius*[1].

56) *G. Frobenius*, J. Reine Angew. Math. **84**, 59, 1978. Vgl. auch *C. S. Pierce*, Amer. J. Math. **4**, 225, 1881; *Cartan*[1]; *L. E. Dickson*, Linear algebras, Cambridge 1919, S. 12.

57) *J. H. M. Wedderburn*, Trans. Amer. Math. Soc. **6**, 349, 1905; *L. E. Dickson*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1905, 379; *E. Artin*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **5**, 245, 1927; *E. Witt*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **8**, 413, 1931; *C. Chevalley*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **11**, 73, 1935.

Ist K nicht vollkommen, so ist A einer zyklischen Algebra ähnlich, ferner auch einem direkten Produkt von zyklischen Divisionsalgebren D_ν, wobei Exponent und Index von D_ν übereinstimmen und höchstens gleich dem Exponenten von A sind[58].

Für die Fälle, daß K ein p-adischer Körper, ein algebraischer Zahlkörper oder ein algebraischer Funktionenkörper ist, vergl. man I C 5 (*Hasse*)[59].

Um einige wichtige Algebren, wie z. B. Quaternionen über dem Körper der reellen Zahlen zu charakterisieren, verwenden *L. Pontrijagin*, *N. Jacobson* und *O. Taussky*[60] topologische Voraussetzungen. Es wird dabei angenommen, daß ein Ring A ein topologische Raum bestimmter Art ist, und daß Addition und Multiplikation stetig sind.

27. Übertragung von Fragestellungen der kommutativen Algebra. Lineare Gleichungen und Determinanten in Schiefkörpern sind vielfach behandelt worden. Vgl. dazu I B 2 (*Henke*). Auch Gleichungen höheren Grades sind, vor allem in Spezialfällen, gelegentlich untersucht worden[61].

Für Polynome $f(x)$ mit Koeffizienten aus einem Schiefkörper A, bei denen x mit den Größen von A vertauschbar ist, gelten ähnliche Sätze wie in der elementaren Algebra[62]. Sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei derartige Polynome, so kann man Polynome $q_L(x)$, $r_L(x)$, $q_R(x)$, $r_R(x)$ finden, so daß

$$(38) \qquad f(x) = q_L(x)g(x) + r_L(x), \qquad f(x) = g(x)q_R(x) + r_R(x)$$

ist, und $r_L(x)$ und $r_R(x)$ kleineren Grad als $g(x)$ haben (*linksseitige* bezw. *rechtsseitige Division*). Darauf kann man den Euklidschen Algo-

58) *A. A. Albert*, Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 388, 1934; **39**, 183, 1935; **40**, 112, 1935; *T. Nakayama*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **11**, 305, 1935; **12**, 113, 1936, *E. Witt*, J. Reine Angew. Math. **176**, 126, 1936; *O. Teichmüller*, Deutsche Math. **1**, 362, 1936; J. Reine Angew. Math. **176**, 157, 1936.

59) Divisionsalgebren über Grundkörper K von besonderer Art werden weiter untersucht bei *E. Witt*, J. Reine Angew. Math. **176**, 153, 1936 (diskret bewertete perfekte K mit vollkommenem Restklassenkörper); *O. F. G. Schilling*, Ann. Math. (2) **38**, 551, 1937 (maximal bewertete K).

60) *L. Pontrjagin*, Ann. Math (2) **33**, 163, 1932; *N. Jacobson* und *O. Taussky*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **21**, 106, 1935; *N. Jacobson*, Amer. J. Math. **58**, 433, 1936; *O. Taussky*, Compositio Math **3**, 299, 1936. Vgl. auch *G. Hoheisel*, S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1929, 524.

61) *E. Study*, Acta Math. **42**, 1, 1918; *A. R. Richardson*, Messenger of Math. **55**, 175, 1926; **57**, 1, 1928; *D. E. Littlewood*, Proc. London Math. Soc. (2) **31**, 40, 1930; **32**, 312, 1931. Vgl. auch *D. E. Littlewood* und *A. R. Richardson*, Proc. London Math. Soc. (2) **35**, 1933, 325.

62) *Wedderburn*[52].

rithmus aufbauen, den linksseitigen und den rechtsseitigen größten gemeinsamen Teiler definieren u. s. w. Verschwindet $f(x)=\gamma_0 x^n+\gamma_1 x^{n-1}+\ldots+\gamma_n$, wenn man x durch ein α aus A ersetzt, so hat $f(x)$ den Rechtsteiler $x-\alpha$.

Gehören die Koeffizienten von $f(x)$ zum Zentrum Z von A, so bringt mit α auch jede Transformierte $\xi\alpha\xi^{-1}$ das Polynom zum Verschwinden. Ist $f(x)$ in Z irreduzibel, so entsteht die allgemeinste Wurzel von $f(x)=0$ aus einer Wurzel α in dieser Weise. Man kann in A dann $f(x)$ als Produkt von n Linearfaktoren schreiben

$$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \tag{39}$$

und hier dürfen diese Faktoren zyklisch vertauscht werden.

O. Ore[63] betrachted allgemeiner Polynome aus einem Schiefkörper A, bei denen für alle α ans A die Unbestimmte x Relationen $x\alpha=\bar{\alpha}x+\alpha'$ mit $\bar{\alpha}$, α' in A erfüllt. Die Zuordnungen $\alpha\to\bar{\alpha}$, $\alpha\to\alpha'$ müssen gewisse Bedingungen befriedigen, damit die Polynome $f(x)$ einen nichtkommutativen Integritätsbereich bilden. Differentialpolynome bilden einen wichtigen Spezialfall, es wird eine Zerlegungstheorie für diese Polynome entwickelt. *N. Jacobson*[64] hat diese Theorie zur Untersuchung von zyklischen Algebren angewendet. *E. Noether* und *W. Schmeidler*[65] haben eine Theorie der Polynomideale auch für den Fall von mehreren nichtkommutativen Unbestimmten gegeben.

Nichtkommutative Integritätsbereiche, in denen eine Division mit Rest gilt, sind von *Wedderburn*[66] untersucht worden. Er gibt u. a. eine Elementarteilertheorie für Matrizen aus derartigen Bereichen[67].

Nicht jeder nichtkommutative Integritätsbereich kann in einen Schiefkörper eingebettet werden[68].

---

63) Ann. Math. (2) **34**, 480, 1933. Vgl. auch *N. Jacobson*, Ann. Math. (2) **35**, 209, 1934.

64) Ann. Math. (2) **35**, 197, 1934.

65) *E. Noether* und *W. Schmeidler*, Math. Z. **8**, 1, 1920. Vgl. auch *Krull*, Math. Z. **23**, 182, 1925; *H. Fitting*, Math. Ann. **111**, 19, 1935; **112**, 572, 1936, für Übertragung von Sätzen der kommutativen Idealtheorie auf den nichtkommutativen Fall.

66) J. Reine Angew. Math. **167**, 132, 1932.

67) Weiter Untersuchungen: *R. Brauer*[17], S. 92—93; *L. A. Wolf*, Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 737, 1936; *S. Wachs*, C. R. Acad. Sci. Paris **200**, 888, 1935; *N. Jacobson*, Proc. Nat. Aca. Sci. USA **21**, 667, 1935; *D. E. Littlewood* und *A. R. Richardson*, Proc. London Math. Soc. (2), **35**, 325, 1933.

68) *A. Malcev*, Math. Ann. **113**, 686, 1937.

D. Ergänzungen

28. Die Systeme von Graßmann und Clifford. Wir behandeln eine wichtige Klasse von Algebren über einem Grundkörper K, die auf *Graßmann*[69] zurückgeht. Es sei m eine feste natürliche Zahl. Wir bilden unendlich viele Basiselemente

$$(40) \qquad 1,\ \varepsilon(\mu_1),\ \varepsilon(\mu_1, \mu_2),\ \varepsilon(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \ldots \quad .$$

Hier wie im folgenden durchlaufen die Argumente $\mu_1, \mu_2, \ldots$ die Werte $1, 2, \ldots, m$. Die Multiplikation wird definiert durch

$$(41) \qquad \varepsilon(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)\,\varepsilon(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s) = \varepsilon(\mu_1, \ldots, \mu_r, \nu_1, \ldots, \nu_s).$$

Wir betrachten die linearen Verbindungen

$$(42) \qquad \alpha = a + \sum_{\mu_1} a(\mu_1)\,\varepsilon(\mu_1) + \sum_{\mu_1, \mu_2} a(\mu_1, \mu_2)\,\varepsilon(\mu_1, \mu_2) + \ldots$$

mit Koeffizienten $a(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ aus K, von denen nur endlich viele von 0 verschieden sind. Man erhält so eine Algebra A von unendlichem Rang. Die zu festem s gehörigen Koeffizienten $a(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ von α lassen sich als Komponenten eines Tensor s-ter Stufe in einem m-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{R}$ auffassen. α ist also durch eine Folge von Tensoren der Stufenzahlen 0, 1, 2, ... gegeben, von denen nur endlich viele nicht verschwinden. Einer linearen Transformation in $\mathfrak{R}$ entspricht ein Automorphismus von A, bei dem der von $\varepsilon(1), \varepsilon(2), \ldots, \varepsilon(m)$ erzeugte Modul auf sich abgebildet wird, und umgekehrt. Die Rechenoperationen in A ergeben invariante Operationen für solche Folgen von Tensoren.

Wir fügen jetzt die Gleichungen hinzu

$$(43) \qquad \varepsilon(\mu)\,\varepsilon(\nu) = -\,\varepsilon(\nu)\,\varepsilon(\mu), \quad \varepsilon(\mu)^2 = 0.$$

Anders ausgedrückt: Es sei N das kleinste Ideal, das alle Größen $\varepsilon(\mu)\,\varepsilon(\nu) + \varepsilon(\nu)\,\varepsilon(\mu)$ enthält; wir bilden $B = A/N$.

Nach (41) und (43) verhält sich $\varepsilon(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ bei Vertauschung der μ_σ schiefsymmetrisch. Es folgt, daß B den Rang 2^m hat.

Ist die Charakteristik $\chi(K)$ von K von $1, 2, \ldots, m$ verschieden, so kann man $a(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ in (42) ebenfalls schiefsymmetrisch annehmen. Es treten also nur Glieder mit $s \leqq m$ auf. Den Rechenoperationen in A

---

69) S. [1]). Für andere auf Graßmann zurückgehende Systeme, ebenso für geometrische Anwendungen vgl. III A B 11 (*Rothe-Lotze-Betsch*). —*D. E. Littlewood*, Proc. London Math. Soc. (2) **35**, 200, 1933 behandelt gewisse mit dem Graßmannschen System zusammenhängende Algebren unendlicher Ordnung.

entsprechen invariante Operationen für Folgen schiefsymmetrischer Tensoren. Die Algebra B bildet die Grundlage für die Theorie der alternierenden Differentialformen[70], sie ist ferner von Bedeutung für die Invariantentheorie[71].

Es sei jetzt $F = \sum q_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$, $q_{\mu\nu} = q_{\nu\mu}$, eine quadratische Form in K. Anstelle von (43) fügen wir allgemeiner die Gleichungen

$$\varepsilon(\mu)\varepsilon(\nu) + \varepsilon(\nu)\varepsilon(\mu) = 2q_{\mu\nu} \tag{44}$$

hinzu. Man erhält eine Algebra C vom Rang 2^m, die für $q_{\mu\nu} = 0$ in B übergeht[72]. Liegen die x_μ in K, so gilt $F = (x_1\varepsilon(1) + x_2\varepsilon(2) + \ldots + x_m\varepsilon(m))^2$.

Nach linearer Transformationen der Basis darf man ohne Einschränkung $q_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ annehmen. Es geht dann (44) über in

$$\varepsilon(\mu)\varepsilon(\nu) = -\varepsilon(\nu)\varepsilon(\mu) \text{ für } \mu \neq \nu, \quad \varepsilon(\mu)^2 = q_{\mu\mu} = q_\mu . \tag{45}$$

Hat K ein von $1, 2, \ldots, m$ verschiedene Charakteristik $\chi(K)$, so können wir wieder die Elemente α von C in der Form (42) schreiben, wo die Tensoren $a(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ schiefsymmetrisch sind $(s = 1, 2, \ldots, m)$. Es sei $\mathfrak{T}$ die Gruppe der linearen Transformationen in m-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{R}$, die die Form F invariant lassen. Dann entspricht jedem T in $\mathfrak{T}$ ein Automorphismus von C, bei dem wieder der von $\varepsilon(1)$, $\varepsilon(2)$, $\ldots, \varepsilon(m)$ erzeugte Modul in sich übergeht. Die Rechenoperationen in C liefern gegenüber $\mathfrak{T}$ invariante Operationen für Folgen schiefsymmetrischer Tensoren.

Ist $\chi(K) \neq 2$ und sind alle $q_\mu \neq 0$, so ist C bei geradem m einfach und normal und kann als direktes Produkt verallgemeinerter Quaternionenalgebren geschrieben werden. Bei ungeradem m hat man einen weiteren Faktor Z der Ordnung 2 hinzuzufügen. Dabei ist Z das Zentrum von C, dessen Basis aus 1 und $\rho = \varepsilon(1)\varepsilon(2)\ldots\varepsilon(m)$ besteht; $\rho^2 = h = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} q_1 q_2 \ldots q_m$. Liegt $\sqrt{h}$ in K, so kann man C durch ein einfaches normales System $\bar{C}$ ersetzen, indem man außer (45) die Relation

$$\varepsilon(1)\varepsilon(2)\ldots\varepsilon(m) = \sqrt{h} \tag{46}$$

vorschreibt. Dem entspricht, daß man $\mathfrak{T}$ durch die Untergruppe der

70) *E. Cartan*, Leçons sur les invariants intégraux, Paris 1923; *E. Kähler*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Heft 16, 1934.

71) Vgl. etwa *R. Weitzenböcke*, Invariantentheorie, Groningen 1923, S. 73.

72) Derartige Systeme treten zuerst bei *W. K. Clifford*[1] auf.

Transformationen T mit $|T| = 1$ ersetzt. Es ist $\bar{C}$ einer Algebra C zur Stufenzahl $m-1$ isomorph.

Die Automorphismen von C bezw. $\bar{C}$ sind innere Automorphismen (Nr. 20). Daraus ergibt sich eine Parameterdarstellung von $\mathfrak{T}$, insbesondere der orthogonalen Gruppe[73]. Für Einzelheiten vergl. man III AB 11 (*Rothe-Lotze-Betsch*)[74].

Auch bei andern Untersuchungen über die Gruppe $\mathfrak{T}$ kann man die Algebra C verwenden[75]. In jüngster Zeit haben *E. Artin* und *E. Witt*[76] die Theorie der quadratischen Formen mit Hilfe dieser Algebren aufgebaut.

Im Fall $m=1$, $q=0$ ist C das System der dualen Zahlen, von denen *E. Study* zahlreiche geometrische Anwendungen gegeben hat. Im Fall $m=2$, $q_1 = q_2 = -1$ erhält man die Quaternionen, ebenso für $\bar{C}$ bei $m=3$, $q_1 = q_2 = q_3 = -1$.

29. Nichtassoziative Algebren. Vielfach sind Algebren behandelt worden, in denen das assoziative Gesetz der Multiplikation nicht mehr gilt. Ein interessantes Beispiel stammt von *J. T. Graves* und *A. Cayley*[77]; die Elemente dieser Algebra A kann man nach *Dickson* in der Form $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2\theta$ darstellen, wo λ_1 und λ_2 Quaternionen, θ ein neues Symbol ist[78]. Die Multiplikation ist durch

$$(47) \qquad (\lambda_1 + \lambda_2\theta)(\mu_1 + \mu_2\theta) = (\lambda_1\mu_1 - \mu'_2\lambda_2) + (\mu_2\lambda_1 + \lambda_2\mu'_1)\theta$$

zu definieren (μ' das konjugierte Quaternion zu μ). Die Ordnung ist 8; als Komponenten von α kann man die Komponenten von λ_1 und λ_2 nehmen. Die Summe der Quadrate dieser 8 Größen heißt die Norm $N(\alpha)$. Es ist $N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta)$. Verschwindet eine Summe von Quadraten in K nur trivial, so haben die Gleichungen $\alpha\xi = \beta$ und $\gamma\alpha = \beta$ für $\alpha \neq 0$ je genau eine Lösung ξ, γ in A.

Verallgemeinerungen dieser Algebra sind von *Dickson*[78] gegeben worden. Dabei gelten immer die Spezialfälle des Assoziativgesetzes

---

73) *R. Lipschitz*, Untersuchungen über die Summen von Quadraten, Bonn 1886.

74) Weitere Literatur: *J. A. Schouten*, Niew Arch. Wiskunde (2) **13**, 141, 249, 1919; *E. Study*, Math. Z. **18**, 55, 201, 1923; **21**, 45, 174, 1924; *F. Hausdorff*, J. Reine Angew. Math. **158**, 1927.

75) *P. A. M. Dirac*, Proc. R. Soc. London (A) **117**, 610, 1927; **118**, 351, 1928; *R. Brauer* und *H. Weyl*, Amer. J. Math. **57**, 425, 1935.

76) *E. Witt*, J. Reine Angew. Math. **176**, 1936.

77) *A. Cayley*, Philos. Mag. London (3) **26**, 210, 1845; ferner s. *J. R. Young*, Trans. Irish Acad. **21**, 338, 1849.

78) Vgl. *L. E. Dickson*, Linear algebras, Cambridge 1914, S. 14; Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927, S. 264.

$$(\alpha\alpha)\beta = \alpha(\alpha\beta), \quad (\alpha\beta)\beta = \alpha(\beta\beta). \tag{48}$$

Algebren, in denen (48) gilt, heißen *Alternativalgebren.* *M. Zorn*[79] hat für sie eine Strukturtheorie analog der oben behandelten gegeben. Eine halbeinfache Algebra ist Summe von einfachen Algebren, und diese letzteren kann man alle angeben. Weiter hat Zorn Untersuchungen über andere aus dem Assoziativgesetz folgende Gleichungen angestellt, die als Axiome in nichtassoziativen Algebren verwendet werden können.

P. Jordan hat gewisse nichtassoziative Systeme bei quantenmechanischen Problemen verwendet, diese Systeme sind eingehend untersucht worden[80].

Eine Reihe von weiteren Resultaten über nichtassoziative Algebren findet man in *L. E. Dickson,* Lineare algebras, London 1914; Algebras and their arithmetics, Chicago 1923[81].

Auch Systeme, in denen das distributive Gesetz nicht oder nur teilweise gilt, sind untersucht worden[82], insbesondere auch im Hinblick auf gruppentheoretische Anwendungen[83].

30. Lie-Algebren[84]**.** Von besonderer Wichtigkeit sind nichtassoziative Algebren A, in denen die Regeln gelten:

$$\alpha\beta = -\beta\alpha, \qquad \alpha(\beta\gamma) + \beta(\gamma\alpha) + \gamma(\alpha\beta) = 0 \tag{49}$$

die sogenannten *Lie-Algebren.* Die infinitesimalen Operationen einer Lieschen Gruppe bilden eine derartige Algebra, wobei als Produkt der Klammerausdruck zu nehmen ist (II A 6 (*Maurer-Burkhardt*)).

Die Teilalgebra $A \cdot A$ heißt die Kommutatoralgebra A'. Im Fall $A' = 0$ wird A als *abelsche* Algebra bezeichnet. Endet die Reihe der

79) *M. Zorn*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **8**, 123, 1931; **9**, 395, 1933. Vgl. ferner *M. Zorn*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **21**, 355, 1935; *R. Moufang*, Math. Ann. **110**, 416, 1934.

80) *P. Jordan*, Z. f. Physik **80**, 284, 1933; **87**, 505, 1934; Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1932, 567 und 1933, 209; *P. Jordan - J. von Neumann* und *E. Wigner*, Ann. Math. (2) **35**, 29, 1934; *A. A. Albert*, Ann. Math. (2) **35**, 65, 1934; *J. von Neumann*, Rec. Math. Moscou. neue Serie **1**, 415, 1936.

81) S.[78], ferner *Wedderburn*[12], S. 110, *L. E. Dickson*, Ann. Math. (2), **20**, 155, 297, 1919; Duke Math. J. **1**, 113, 1935; *G. C. Moisil*, Ann. Sci. Univ. Jassy **20**, 10, 1935; *O. C. Hazlett*[4]; *C. C. MacDuffee*[4].

82) *L. E. Dickson*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1905, 358; *R. D. Carmichael*, Amer. J. Math. **53**, 630, 1931; *H. Zassenhaus*, Abh. Math. Sem. Hansische Univ. **11**, 17, 187, 1935.

83) Weitere Literatur: *O. Taussky*, Bull. Calcutta Math. Soc. **28**, 245, 1936; *Ph. Furtwängler* und *O. Taussky*, S. B. Akad. Wiss. Wien 1936, 525.

84) Man vgl. etwa *E. Cartan*, Thèse, Paris 1894; *H. Weyl*, Math. Z. **24**, 328, 1925.

iterierten Kommutatoralgebren A', $(A')' = A''$, $(A'')' = A'''$, ... mit 0, so heißt A *auflösbar*. Endet sogar die Reihe $A \cdot A = A^2$, $A \cdot A^2 = A^3$, $A \cdot A^3 = A^4, \ldots$ mit 0, so heißt A *nilpotent*. Jede nilpotente Algebra ist auflösbar. Andererseits ist die Kommutatoralgebra einer auflösbaren Algebra nilpotent, falls K die Charakteristik 0 hat. Ein Element α heißt nilpotent, wenn für jedes ξ aus A die Elemente $\xi' = \alpha\xi$, $\xi'' = \alpha\xi'$, $\xi''' = \alpha\xi'', \ldots$ von einer Stelle ab 0 werden. Dann und nur dann ist A nilpotent, wenn jedes α in A nilpotent ist (*Engelsches Theorem*)[85].

Die Definition der Ideale, der Quotientenalgebra, der Einfachheit ist dieselbe wie im assoziativen Fall. Stets ist A/A' eine abelsche Algebra. Jede Lie-Algebra enthält ein eindeutig bestimmtes maximales auflösbares Ideal L, das *Radikal*. Ist $L = 0$, so heißt A *halbeinfach*. Jede einfache Algebra (außer der Algebra von der Ordnung 1) ist auch halbeinfach.

Hat der Grundkörper K die Charakteristik 0, so ist auch hier eine halbeinfache Algebra direkte Summe einfacher Algebren. Die Gesamtheit aller einfachen Algebren ist von *H. Cartan*[86] für den Fall aufgestellt worden, daß K ein algebraisch abgeschlossener oder reell abgeschlossener Körper ist. Auch der Fall eines beliebigen Grundkörpers K der Charakteristik 0 ist in letzter Zeit weitgehend untersucht worden[87].

Man hat eine *Darstellung* einer Lie-Algebra, wenn jedem Element α von A eine Matrix M_α derart zugeordnet ist, daß für alle α, β aus A und alle t aus K

$$M_{\alpha+\beta} = M_\alpha + M_\beta, \quad M_{t\alpha} = tM_\alpha, \quad M_{\alpha\beta} = M_\alpha M_\beta - M_\beta M_\alpha \tag{50}$$

gilt. Analog zu der regulären Darstellung (Nr. 5) kann man auch hier Darstellungen erhalten, die sogenannte *adjungierte Darstellung*. Die Spur σ von M_α^2 ist eine quadratische Form in den Parametern von α. Hat K die Charakteristik 0, so ist dann und nur dann σ nichtentartet, wenn A helbeinfach ist (vergl. Nr. **17**). Dann und nur dann ist A auflösbar, wenn für alle γ aus A' die Spur von M_γ^2 verschwindet.

31. Hinweis auf einige weitere Anwendungen hyperkomplexer Größen. Die Zahlentheorie in hyperkomplexen Systemen und ihre Anwendungen werdenin 22 (*Hasse*) behandelt. Auf dem Wege über die Darstel-

---

85) Vgl. etwa *M. Zorn*, Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 401, 1937.

86) S. [84]. Vgl. ferner *B. L. van der Waerden*, Math. Z. **37**, 446, 1933.

87) *W. Landherr*, Abh. Math. Sem. Hansische Univ. **11**, 41, 1935; *N. Jacobson*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **23**, 240, 1937; Ann. Math. (2) **38**, 508, 1937. — Von weiteren Arbeiten über Lie-Algebren seien genannt: *N. Jacobson*, Ann. Math. (2) **36**, 875, 1935; Trans. Amer. Math. Soc. **42**, 206, 1937; *E. Witt*, J. Reine Angew. Math. **177**, 152, 1937; *G. Birkhoff*, Ann. Math. (2) **38**, 526, 1937.

lungstheorie 14 (*Deuring*) erhält man durch Untersuchung der Gruppenringe (Nr. 4) wichtige Anwendungen in der Gruppentheorie (15 (*Magnus*)). Für eine Anwendung auf algebraische Gleichungen vergl. man 17 (*Brauer*).

Die Theorie der Algebren spielt eine Rolle bei der Untersuchung von Riemannschen Matrizen[88]. Dies sind Matrizen Ω, die von den Perioden der p linear unabhängigen Integrale 1. Art auf einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht p gebildet werden. Ω hat p Zeilen und $2p$ Spalten, und es gibt eine schiefsymmetrische rationalzahlige Matrix C vom Grad $2p$ mit $|C| \neq 0$, derart daß $\Omega C^{-1}\Omega' = 0$ gilt, und ferner $\Omega(iC^{-1})\overline{\Omega}'$ die Matrix einer positiven definiten Hermiteschen Form ist. Man suche Matrizen M vom Grad $2p$, für die eine Gleichunge $M\Omega = \Omega R$ besteht, wo R eine rationalzahlige Matrix p-ten Grades ist. Diese M bilden eine Algebra A über dem Körper der rationalen Zahlen, ebenso bilden die R eine isomorphe Algebra. Die Eigenschaften dieser Algebren A und die Konstruktion von Riemannschen Matrizen zu gegebenem A ist von *A. A. Albert*[89] eingehend untersucht worden. Eine andere Behandlung der Frage ist von *H. Weyl*[90] von etwas anderem Ausgangspunkt aus gegeben worden.

Von Bedeutung sind hyperkomplexe Größen ferner für Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. So beweist *D. Hilbert*[91] die Unabhängigkeit des Pascalschen Satzes von den räumlichen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen, indem er mit Hilfe eines geordneten Schiefkörpers[92] eine analytische Geometrie bildet. Mit Hilfe von Alternativsystemen kann *R. Moufang*[93] die ebenen Geometrien beschreiben, in denen der Satz vom vollständingen Vierseit gilt. *O. Veblen* und *J. L. M. Wedderburn* haben nichtdistributive Systeme für Grundlagenfragen verwendet[94]. Neuerdings hat *J. von Neumann*[95] mit Hilfe von Schiefkörpern kontinuierliche projektive Geometrien gebildet.

(*Received August 14, 1978*)

88) Vgl. dazu *S. Lefschetz*, Bull. Nat. Res. Counc. Washington **63**, 310, 1928.

89) Ann. Math. (2) **36**, 886, 1935. Dort findet man Alberts vorangehende Arbeiten angeführt.

90) Ann. Math. (2) **35**, 714, 1934; **37**, 709, 1936.

91) Grundlagen der Geometrie, 7 Aufl. Leipzig 1930.

92) Untersuchungen über geordnete Schiefkörper finden sich bei *R. Moufang*, J. Reine Angew. Math. **176**, 203, 1937.

93) Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **9**, 207, 1933.

94) *O. Veblen* und *J. H. M. Wedderburn*, Trans. Amer. Math. Soc. **8**, 379, 1907.

95) Proc. Nat. Acad. Sci. USA **22**, 101, 1936.