EINE BEMERKUNG ÜBER INNERE AUTOMORPHISMEN

FRIEDRICH KASCH

1. Kürzlich bewiesen T. Nagahara und H. Tominaga die folgenden Sätze.

Satz 1[1]**:** *Seien D ein Schiefkörper, L ein Unterschiefkörper von D und D/L galoissch mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$*[2]. *Besitzt jedes Element $a \in D$ bei den Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ nur endlich viele verschiedene Konjugierte, dann folgt: Entweder ist der Zentralisator $V_D(L)$ von L in D gleich dem Zentrum von D oder $V_D(L)$ ist ein endlicher Körper.*

Satz 2[3]**:** *Sei R ein einfacher Ring mit 1-Element und Minimalbedingung und sei R' ein einfacher, galoisscher Unterring von R, der das 1-Element von R enthält. Gilt ferner, daß $V_R(R')$ ein einfacher Ring ist, jedes Element $a \in R$ bei den Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ nur endlich viele verschiedene Konjugierte besitzt und jeder Unterring von R, der über R' endlich erzeugbar ist, in einem über R' endlichen und galoisschen Unterring von R enthalten ist, dann folgt: Entweder ist $V_R(R')$ gleich dem Zentrum von R oder $V_R(R')$ besitzt nur endlich viele Elemente.*

Diese Sätze sind enthalten in dem folgenden Satz, dessen Herleitung das Ziel dieser Note ist. Dabei ist der Beweis einfacher als der in [1] angegebene Beweis der Sätze 1 und 2. Allerdings finden sich die hier benutzten einfachen Schlüsse im wesentlichen schon in [1], wo sie nur durch die Berücksichtigung von überflüssigen Voraussetzungen zum Teil etwas verdeckt werden.

Satz 3: *Es seien R ein beliebiger Ring mit 1-Element und U ein einfacher Unterring von R mit Minimalbedingung, der das 1-Element von R enthält. Ist U nicht im Zentrum von R enthalten*

1) [1] Theorem; siehe auch [2] Theorem 1, (3).

2) D/L heißt galoissch, falls L Fixkörper einer Automorphismengruppe von D ist; die Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Automorphismen von D/L heißt dann die Galoisgruppe von D/L.

3) [1] Remark 1.

und besitzt U unendlich viele Elemente, dann gibt es ein Element $a \in R$ mit der Eigenschaft, daß unendlich viele der Elemente uau^{-1} untereinander verschieden sind, wenn u alle invertierbaren Elemente aus U durchläuft.

Bemerkung: Aus Satz 3 erhält man unmittelbar Satz 1 bzw. Satz 2, wenn man $U = V_D(L)$ bzw. $U = V_R(R')$ setzt[1]; die Existenz des in Satz 3 angegebenen Elementes a steht dann Widerspruch zu der Voraussetzung, daß es nur endlich viele verschiedene Konjugierte eines jeden Elementes geben soll.

2. **Beweis.** Als einfacher Ring mit 1-Element und Minimalbedingung kann U als Ring aller $n \times n$ Matrizen über einem Schiefkörper D betrachtet werden. Da U unendlich viele Elemente besitzt, gilt dies auch für D. Sei jetzt $n > 1$. Wie schon in [1] gezeigt, kann dann a bereits in U selbst gewählt werden: Bezeichnet man mit e_{ij} die Matrixeinheiten, so hat $a = e_{22}$ die gewünschte Eigenschaft; wegen $(1+de_{12})(1-de_{12}) = 1$ mit beliebigem $d \in D$ gilt $(1+de_{12})e_{22}(1-de_{12}) = e_{22}+de_{12}$, womit für $n > 1$ die Behauptung bewiesen ist.

Wir setzen jetzt $n = 1$ voraus, d. h. U sei ein Schiefkörper K und zeigen sogleich den allgemeineren

Satz 4: *Seien R ein beliebiger Ring mit 1-Element und K ein in R enthaltener Schiefkörper, der das 1-Element von R enthält und unendlich viele Elemente besitzt; ist a ein Element aus R, für das $K \not\subseteq V_R(a)$ gilt, dann gibt es unendlich viele verschiedene Elemente kak^{-1} mit $k \in K$.*

Bemerkung: Ist K ein Unterschiefkörper von R, der nicht im Zentrum von R enthalten ist, dann gibt es selbstverständlich ein Element $a \in R$ mit $K \not\subseteq V_R(a)$. Mit Satz 4 ist also der Beweis von Satz 3 vollständig.

Beweis von Satz 4: Gilt für zwei beliebige in R invertierbare Elemente r und s: $rar^{-1} = sas^{-1}$, so folgt $s^{-1}r \in V_R(a)$, d. h. $r = sz$ mit $z \in V_R(a)$. Wir setzen $V_R(a) \cap K = Z$; wegen $K \not\subseteq V_R(a)$ gilt dann $Z \neq K$. Da mit einem invertierbaren Element $z \in V_R(a)$ auch $z^{-1} \in V_R(a)$ gilt, ist Z ein Schiefkörper. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

---

1) Für U haben wir die Minimalbedingung vorausgesetzt; diese folgt für $V_R(R')$ aus der in Satz 2 gemachten Voraussetzung über R.

1. Fall: *Z besitzt unendlich viele Elemente.*

Wegen $Z \subset K$, $Z \neq K$ gibt es zwei Elemente $h, k \in K$, die über Z rechts linear unabhängig sind. Nimmt man an, daß die Elemente $h+kz_1$ und $h+kz_2$ mit z_1, $z_2 \in Z$ die gleichen Konjugierten von a erzeugen, so folgt $h+kz_1 = (h+kz_2)z$ mit $z \in Z$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von h und k ist dies nur für $z=1$ und $z_1 = z_2$ möglich. Also erzeugen die Elemente $h+kz$ für verschiedene $z \in Z$ verschiedene Konjugierte von a, also unendlich viele verschiedene.

2. Fall: *Z besitzt nur endlich viele Elemente.*

Da K unendlich viele Elemente enthält, muß jetzt der Rechtsrang von K/Z unendlich sein. Nach der anfangs des Beweises gemachten Bemerkung die Elemente einer Rechtsbasis von K/Z verschiedene Konjugierte von a, also auch jetzt unendlich viele verschiedene.

LITERATUR

[1] T. NAGAHARA & H. TOMINAGA: A note on Galois theory of division rings of infinite degree. Proc. Jap. Ac. 31, (1955), 655—658.

[2] T. NAGAHARA & H. TOMINAGA: On Galois theory of division rings. Proc. Jap. Ac. 32, (1956) 153—156.

MATHEMATISCHES INSTITUT,
UNIVERSITÄT HEIDELBERG

(Received January 15, 1957)