開多様体の p 進 Hodge 理論 (レジュメ)

山下　剛
東京大学大学院数理科学研究科
gokun@ms.u-tokyo.ac.jp

多様体が固有でない時や滑らかでない時の p 進 Hodge 理論の比較同型を紹介する.

K を標数 0 の完備離散付値体, O_K をその付値体, k をその剰余体で標数 $p>0$ の完全体とする. K_0 を k を係数にもつ Witt 環の商体, $\overline{K}$ を K の代数閉包, G_K を K の絶対 Galois 群とする. B_{dR}・B_{crys}・B_{st} を Fontaine の p 進周期の環とする.

Theorem 0.1 *(open C_{st} 予想)* X を O_K 上の固有準安定モデル, D を水平な正規交叉因子とし, その特殊ファイバーを各々Y と C とする. この時, 次の標準的な B_{st} 線型同型がある.

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}((X\setminus D)_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y\setminus C),$$

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét},c}((X\setminus D)_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{logcrys},c}(Y\setminus C),$$

これは, G_K・φ・N の作用及び B_{st} 上で B_{dR} をテンソルした後の *Hodge* フィルトレイション, 積構造とも整合的である. 構造の入れ方は次の通り.

	B_{st}	$\otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\mathrm{et},(c)}((X\setminus D)_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$	$\cong$	B_{st}	$\otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{logcrys},(c)}(Y\setminus C)$
Gal	g	$\otimes g$		g	$\otimes 1$
Frob	φ	$\otimes 1$		φ	$\otimes\varphi$
Monodromy	N	$\otimes 1$		$N\otimes 1$	$+1\otimes N$
$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Fil}^i \text{ after} \\ B_{\mathrm{dR}}\otimes_{B_{\mathrm{st}}}\end{array}\right\}$	Fil^i	$\otimes H^m_{\text{ét}}$		$\sum_{i=j+k} \mathrm{Fil}^j$	$\otimes \mathrm{Fil}^k$

上の定理はさらに強く, 因子 D を 2 つに分けて一方にのみサポートを持つ「部分的サポート付きコホモロジー」に対しても成立する. 「部分的サポート付きコホモロジー」に対しても比較同型を考える事は, 開多様体に対して代数的対応を考える時に重要な意味を持ってくる.

Theorem 0.2 *(open non-smooth C_{dR} 予想)* U_K を K 上有限型分離的な多様体とする. この時, 次の B_{dR} 線型な同型が存在する.

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{HdR}}(U_K/K),$$

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét},c}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{HdR},c}(U_K/K),$$

これは, G_K の作用と *Hodge* フィルトレイションと整合的である. ここで H_{HdR} と $H_{\mathrm{HdR},c}$ は *Hartshorne* の代数的 *de Rham* コホモロジーを表す.

U_K が K 上固有滑らかな多様体から正規交叉因子を除いたものになっている時, 上の定理は「部分的サポート付きコホモロジー」でも成立する.

Theorem 0.3 *(C_{pst} 予想)* U_K を K 上有限型分離的な多様体とする. この時, $H^m_{\text{ét}}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ 及び $H^m_{\text{ét},c}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ は G_K の潜在的準安定な p 進表現である.