Two theorems about G-dimension

高橋　亮（岡山大学大学院自然科学研究科）

R を可換 Hensel 局所環とし，k をその剰余体とする．

定義　M を有限生成 R 加群とする．

(1)　$(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, R)$ とおく．次の 3 つの条件が成り立つとき，M の G 次元は 0 であると言い，$\text{G-dim}_R M = 0$ と書く：

i)　自然な写像 $M \to M^{**}$ が同型である．

ii)　任意の $i > 0$ に対し $\mathrm{Ext}_R^i(M, R) = 0$ である．

iii)　任意の $i > 0$ に対し $\mathrm{Ext}_R^i(M^*, R) = 0$ である．

(2)　n を非負整数とする．M の n 番目の syzygy 加群 $\Omega_R^n M$ の G 次元が 0 のとき，M の G 次元は n 以下であると言い，$\text{G-dim}_R M \le n$ と書く．

１． $\mathrm{mod}R$ を有限生成 R 加群全体のなす圏とし，$\mathcal{G}(R)$ を G 次元 0 の R 加群全体のなす $\mathrm{mod}R$ の充満部分圏とする．R が Gorenstein 環のときは，$\mathrm{mod}R$ は $\mathcal{G}(R)$ で近似できる：

定理 (Auslander-Buchweitz)　R が Gorenstein 環ならば，$\mathcal{G}(R)$ は $\mathrm{mod}R$ の中で contravariantly finite である．

では，R が Gorenstein 環でない場合はどうなのか？自明な場合を除くと，$\mathrm{mod}R$ は $\mathcal{G}(R)$ では近似できないと思われる．すなわち，

予想　$\mathcal{G}(R)$ が自由加群だけから成る場合を除いて，上の定理の逆が成り立つだろう．

この予想は，例えば R が Artin 環なら正しい．より一般に，

定理　R の深さが 2 以下ならこの予想は正しい．

２． k の射影次元が有限なら R は正則環である．より一般に，

定理 (Dutta)　ある $n \ge 0$ に対して $\Omega_R^n k$ が射影次元有限な直和因子を持てば，R は正則環である．

正則性と射影次元の関係は，Gorenstein 性と G 次元の関係と同じであるとみることができるので，

予想　ある $n \ge 0$ に対して $\Omega_R^n k$ が G 次元有限な直和因子を持てば，R は Gorenstein 環だろう．

定理　n が 2 以下ならこの予想は正しい．