Gorenstein イデアルの生成元の個数について

岡山大学大学院　自然科学研究科　数理物理科学専攻
仁後雅晴

2004 年 2 月

S を正則局所環とし、その剰余環 $R := S/\mathfrak{a}$ が Gorenstein 局所環になるイデアル $\mathfrak{a}$ を Gorenstein イデアルという。この Gorenstein イデアルがどのようなものであるかを、特にその生成元の個数という観点から考えてみた。

一般に $\mathfrak{a}$ の height と極小生成元の個数の差が 1 であるような時は、Gorenstein 局所環ではないことが示されている (E.Kunz [2])。$\mathfrak{a}$ の height が 2 以下であるとき $S/\mathfrak{a}$ が Gorenstein であることと Complete Intersection であることは同値である (Serre) ので、Gorenstein であり Complete Intersection でない $\mathfrak{a}$ は高さが 3 以上となる。このような height 3 のイデアル $\mathfrak{a}$ を最初に考えたい。そうすると、前述のことからイデアルの極小生成元の個数は 5 以上になるが、さらに極小生成元の個数が奇数になることが知られている (J.Watanabe [3])。これは、R がアルティン環ならば $\mathfrak{a}$ は既約なので、S 上かつ R 上の非零因子が存在すればその元で R を剰余し、R をアルティン環に帰着させ、既約な $\mathfrak{m}$-準素イデアルの生成元の個数に関する帰納法によって得られる。また、Buchsbaum と Eisenbud によって n 次の交代行列から得られる $n-1$ 次の交代行列の Pfaffian が生成するイデアル $\mathfrak{a}$ は height 3 で $S/\mathfrak{a}$ が Gorenstein になり、逆に $S/\mathfrak{a}$ が Gorenstein になる height 3 のイデアルはこのようにして得られることが示されている。この系としても $\mathfrak{a}$ の極小生成元の個数は奇数になることがわかる。

参考文献

[1] D.Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, GTM **150**, Springer-Verlag,

[2] E.Kunz, *Almost complete intersections are not Gorenstein rings*, J.Algebra.**28** (1974), 111–115.

[3] J.Watanabe, *A note on Gorenstein rings of embedding codimension three*, J.Nagoya, **50**(1973), 227–232.

[4] J.Sally, *Number of generators of ideals in local rings*, Lect.Notes in pure appl.math.**35**, Marcel Dekker, 1978.