3次行列環の部分代数について

中本　和典（詫間電波高専）
nakamoto@dg.takuma-ct.ac.jp

アブストラクト

kを代数的閉体とする．3次の行列環$\mathrm{M}_3(k)$の部分k代数を考える．$\mathrm{M}_3(k)$の部分k代数A, Bが同値であるとは，ある正則行列$P \in \mathrm{GL}_3(k)$が存在して，$P^{-1}AP = B$となるときをいう．この定義の下，次の問題を考える．

問題 1. $\mathrm{M}_3(k)$の部分k代数の同値類を分類せよ．

答えは次のようになる．

答え 2. kの標数によらず，全部で26種類ある．

それでは，代数的閉体ではなく，一般の可換環上の3次の行列環ではどうか。このことを調べるために，まずは次の定義を導入する．

定義 3. Rを可換環とする． R部分代数$A \subseteq \mathrm{M}_3(R)$が鋳型であるとは，$R$加群$\mathrm{M}_3(R)/A$および$A$が射影的であるときをいう．$A$が階数$r$とは，$A$の射影加群として階数$r$のときをいう．

「鋳型」とは，$\mathrm{M}_3(R)$のR部分代数のうち良い性質をもつもののことである．本来は「表現のモジュライ」を考える際に出てきた概念であるが、詳細は割愛する．

階数rの鋳型はいったいどのくらいあるのであろうか．鋳型を集めてきてつくった「鋳型のモジュライ」を導入することにする．

定義 4. 射影的スキーム$\mathrm{Mold}_{3,r}$で，

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}R, \mathrm{Mold}_{3,r}) = \{R\text{ 上の階数 } r \text{ の鋳型}\}$$

が任意の可換環Rに対し成り立つものが存在する．(注意，右辺の集合は（鋳型の）同値類で割っていない！）

代数幾何の知識が要るので詳しい説明はできないが，平たく言うと，各点が鋳型１つ１つになっているような幾何学的対象があるということである．

この「鋳型のモジュライ」の幾何学的構造を調べることは非常に興味深い.「鋳型のモジュライ」を調べることにより，可換環上の鋳型に関する結果が得られる．　そのほんの１例を紹介する．

定理 5. Rを局所環とする．$A \subseteq \mathrm{M}_3(R)$を階数5の鋳型とする．このとき正則行列$P \in \mathrm{GL}_3(R)$が存在して，

$$P^{-1}AP \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(R) \right\}$$