概均質ベクトル空間とその量子化

大阪市立大学数学研究所　紙田 敦史

アブストラクト:

L を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数群とする. L 加群 V が（Zariski 位相で）開集合となる L 軌道を持つとき, 組 (L, V) を概均質ベクトル空間（prehomogeneous vector space）という. その中で可換放物型と呼ばれるものは単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ の中に実現できる. この場合 L は $\mathfrak{g}_0$ のある放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ の極大簡約部分代数 $\mathfrak{l}$ に対応する代数群であり, V は $\mathfrak{p}$ の可換巾零根基である. この講演の目標は可換放物型概均質ベクトル空間の量子化（q 類似）について解説することである.

一般に Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の量子化は量子群と呼ばれる代数 $U_q(\mathfrak{g})$ であり, 生成元と基本関係式により定義される（ここでは有理関数体 $\mathbb{C}(q)$ 上で考える）. $U_q(\mathfrak{g})$ の基本関係式にはパラメータ q が含まれており, $q = 1$ とすると $\mathfrak{g}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の基本関係式が復元できる. 表現に関しても同様に $\mathfrak{g}$ 加群 V に対してこれを復元する $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 V_q が存在することが知られている.

話を可換放物型概均質ベクトル空間 (L, V) の量子化に戻す. このとき L, V に関しては上で述べたように量子化 $U_q(\mathfrak{l})$, V_q が存在する（特に $U_q(\mathfrak{l})$ は $U_q(\mathfrak{g}_0)$ の部分代数である）. しかしこれだけでは不十分である. 概均質ベクトル空間では幾何構造を考えるため, V の座標環（V 上の多項式関数環）$\mathbb{C}[V]$ の量子化 $\mathbb{C}_q[V]$ も必要となる. この $\mathbb{C}_q[V]$ は量子群の PBW 型基底を用いて $U_q(\mathfrak{g}_0)$ の部分代数として構成できる（阪市大の谷崎俊之先生, 広島大の森田良幸先生との共同研究）. $\mathbb{C}_q[V]$ は非可換代数であり, 生成元と基本関係式もわかっている. また, V の L 軌道に対してその閉包の定義イデアル（$\subset \mathbb{C}[V]$）に対応する $\mathbb{C}_q[V]$ の両側イデアル（つまり軌道の量子化と思えるもの）も構成できる.

最後に具体例を挙げておく. $L = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ とし, 作用を $(g_1, g_2).X = g_1 X {}^t g_2$ で定める. このとき L 軌道は $\{0\}$, $O_1 = \{X \mid \mathrm{rank} X = 1\}$, $O_2 = \{X \mid \det X \neq 0\}$ であり, O_2 が開軌道となる. 自然な座標環を $\mathbb{C}[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]$ とすると, $\overline{O_1}$ の定義イデアル $\mathcal{I}$ は行列式 $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$ で生成される. 一方, 量子化 $\mathbb{C}_q[V]$ は次の基本関係式をみたす $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ で生成される:

$$
\begin{aligned}
&X_{11}X_{12} = qX_{12}X_{11},\ X_{11}X_{21} = qX_{21}X_{11},\ X_{12}X_{22} = qX_{22}X_{12},\\
&X_{21}X_{22} = qX_{22}X_{21},\ X_{12}X_{21} = X_{21}X_{12},\\
&X_{11}X_{22} = X_{22}X_{11} + (q - q^{-1})X_{21}X_{12}.
\end{aligned}
$$

また $\mathcal{I}$ の量子化は量子行列式 $\det_q = X_{11}X_{22} - qX_{12}X_{21}$ で生成される $\mathbb{C}_q[V]$ の両側イデアルである.