Auslander 代数と n-Gorenstein 環

姫路工業大学　伊山修

以下多元環と言えば, 基礎体上有限次のもののみ考える. 多元環 Λ に対し, $\mathrm{mod}\,\Lambda$ を有限生成左 Λ-加群の圏とする. 講演の主題は関手圏 $\mathrm{mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ である. この圏は様々な興味深い性質を持つが, 特に左完全関手 $\alpha : \mathrm{mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda) \leftrightarrow \mathrm{mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda^{op})$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,X) \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda(X,\ )$ の導来関手 $\mathrm{R}^i\alpha$ を考察すると, 次の事実を得る.

定理 1　各 $i \geq 0$ に対し $\mathrm{soc}\,\mathrm{R}^i\alpha$ は, $\{S \in \mathrm{mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda) \mid S$ は単純で grade $S = i\}$ と $\{S \in \mathrm{mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda^{op}) \mid S$ は単純で grade $S = i\}$ の双対を与える.

これは, $i = 2$ ならば Auslander-Reiten 列の存在定理を意味し, $i = 0$ ならば中山関手の存在を意味する. この意味で表現論的なものであるといえる. 一方, $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の直既約対象の同型類が有限個しかない時, Λ は有限表現型と呼ばれるが, 次の定理が知られている.

定理 2 (Auslander) 有限表現型多元環 Λ の森田同値類と, 多元環 Γ で $\mathrm{gl.dim}\,\Gamma \leq 2$, $\mathrm{dom.dim}\,\Gamma \geq 2$ を満たすものの森田同値類の間に一対一対応が存在する. それは $\Lambda \mapsto \Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(\bigoplus_{X \in \mathrm{mod}\,\Lambda,\ \text{直既約}} X)$ で与えられる.

この様な Γ は Auslander-Gorenstein 環の特別なクラスを成す. Auslander-Gorenstein 環とは, 可換 Gorenstein 環の非可換化の一つであり, 多くの重要な例が知られているが, 講演では Auslander-Gorenstein 環への一つのアプローチとして, 表現論的手法によって得られた定理 1 の類似が, Auslander-Gorenstein 環に対して成立する事を示す.