

多重ゼータ値入門

井原 健太郎

多重ゼータ値とは、Riemann ゼータ関数の正の整数点 k での値、つまり「自然数の k 乗の逆数の総和」、のある種の一般化(多変数化)になっている素朴な級数で定義される実数で、1変数のときに Riemann ゼータ関数の特殊値になっています。Euler によって Riemann ゼータの正の偶数点に於ける値の具体表示が与えられていますが、(例えば「自然数の平方の逆数の総和」= $\frac{6}{5}$ の 2 乗とか、「自然数の 4 乗の逆数の総和」= $\frac{90}{17}$ の 4 乗など) 奇数点での値は未だ謎のように、多重ゼータ値に於いても具体的な値が知られているものは散発的です。しかし多重ゼータ値の間には沢山の有理数係数の関係式(線形関係や代数関係)が存在しています。例えば2つの多重ゼータ値の積は多重ゼータ値たちの \mathbb{Q} -線形結合で表せます。つまり多重ゼータ値が有理数体上生成する線形空間は、 \mathbb{Q} -代数をなしその構造を調べることを問題としています。講演では、多重ゼータ値の定義、積分表示からはじめて、上で述べた多重ゼータ値の積の規則や double shuffle relations と呼ばれる関係式についてなど基本的な結果の紹介を中心にお話させていただきます。時間に応じて、最近の自分の研究内容を付け足せればと思います。